Corrigés Divers

Ce document produit divers corrigés d'exercices non traités ou à peine évoqués.
Les solutions sont concises, les arguments sont ramassés.

TD3 le dernier exercice

Exercice 1 : (Proba)
On dispose d'une urne contenant n-2 boules noires, 1 boule blanche et une verte.
On tire, jusqu' à épuisement du contenu, une boule sans remise et on note X la variable aléatoire renvoyant le rang du tirage de la boule blanche.
Loi de X. (A suivre....., bande de veinards !!)
Solution :
Les boules étant indiscernables, cela aurait pu être préciser, on décide de les numéroter. 1 pour la blanche, 2 pour la verte et les noires le sont de 3 à n.
Fixons $i \in [\![1, n]\!]$ et notons pour j dans le même intervalle d'entiers $A_{i,j}$ l'événement on tire au i-ième coup la boule numérotée j. Ces derniers forment un système d'événements et par ailleurs équiprobables. Donc la probabilité de chacun de ces événements vaut $1/n$.
Il en résulte que X et Y suivent une même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ ■

TD6 le dernier exercice

Exercice 2 : (X-ENS, Oral)
Nature de la série de terme général $\dfrac{\sin^2(n)}{n}$?
Solution :
On posera, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sin^2(n)}{n}$, $v_n = \dfrac{\cos^2(n)}{n}$.
Puis pour $n \geq 2$: $a_n = \dfrac{\sin^2(n-1)}{n-1}$ et $b_n = \dfrac{\sin^2(n+1)}{n+1}$.
Enfin $w_n = \dfrac{\sin^2(n-1)}{n}$ et $t_n = \dfrac{\sin^2(n+1)}{n}$ dans un contexte similaire.
Comme, pour ces n, $u_n + v_n = \dfrac{1}{n}$, une des séries (au moins) $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ doit diverger.
Par décalage avant ou arrière $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est de même nature que $\sum\limits_{n\geq 2} a_n$ et que $\sum\limits_{n\geq 2} b_n$.
Comme $a_n \sim w_n$ et $b_n \sim t_n$, par comparaison des STP, il vient que les séries de termes généraux u_n, w_n et t_n sont de même nature.
Supposons que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge (dès lors $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ diverge) alors la série de terme général $w_n + t_n$ doit converger et ce terme général vaut $2(\dfrac{\cos^2(1)\sin^2(n)}{n} + \dfrac{\sin^2(1)\cos^2(n)}{n})$, ce qui est contradictoire puisque $\sin(1) \neq 0$ et que $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ diverge.
Il en résulte que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.

On pourra observer que la technique précédente montre aussi que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin^2(nx)}{n}$ diverge si $x \neq k\pi$ ■

TD7 exercice 12

Exercice 3 : (X)
Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $P = aX + b$ et $Q = cX + d$.

On définit f l'endomorphisme de $E=\mathbb{R}_n[X]$ par $f(X^k)=P^kQ^{n-k}$, ce pour $k\in[\![0,n]\!]$.
Déterminant et trace de f.
Solution :
On ne s'occupe que du déterminant. On note systématiquement en majuscule la matrice dans $(1,....,X^n)$ d'un endomorhisme de E noté lui avec la miniscule correspondante.
On pose $m=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Les cas particuliers mis en évidence en classe trouveront leur place dans la formule donnée pour le cas suivant $P=X+\alpha$ et $X+\beta$, où on a posé $\alpha=\dfrac{b}{a}$ et $\beta=\dfrac{d}{c}$. Posons $g:P\in E\to P(X-\alpha)$ et $h=gof$ alors $h(X^k)=X^k(X+\beta-\alpha)^{n-k}$ donc la matrice H est triangulaire inférieure et on a $\det(H)=\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(\beta-\alpha)^{n-k}=(\beta-\alpha)^m$.
G quant à elle est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux valent 1 donc $\det(G)=1$, comme $\det(H)=\det(G)\det(F)$, on a $\boxed{\det(f)=\det(F)=\det(H)=(\beta-\alpha)^m}$.
La formule générale s'obtient, par linéarité suivant chaque colonne du déterminant, en multipliant le résultat précédent par $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}a^kc^{n-k}=(ac)^m$ et donne $\boxed{(ad-bc)^m}$, formule dont la simplicité me laisse rêveur■

Exercices donnés en cours...

Exercice 4 : (Vandermonde)
Valeur de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(x) & \cos(y)y & \cos(z) \\ \cos(2x) & \cos(2y) & \cos(2z) \end{vmatrix}$?
Solution :
Avec la formule du duplication du cosinus et la manipulation $L_3\leftarrow L_3+L_1$ puis la linéarité suivant la dernière ligne, on trouve $\boxed{V(\cos(x),\cos(y),\cos(z))}$■
Exercice 5 : (Somme directe)
Soient E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel et $f\in L(E)$ tel que $f^3=id_E$. On pose, pour $k\in[\![0,2]\!]$, $E_k=Ker(f-j^kid_E)$, où $j=exp(\dfrac{2i\pi}{3})$.
Prouver que $E=\displaystyle\bigoplus_{k=0}^{2}E_k$.
Solution :
Le fait que la somme soit directe a été prouvé en classe.
Montrons par analyse et synthèse que $E\subset\displaystyle\bigoplus_{k=0}^{2}E_k$. Pour cela on se donne $x\in E$ et $x_k\in E_k$ pour $k\in[\![0,2]\!]$ tels que : $x=x_0+x_1+x_2$ (1).
On fait agir f et f^2 sur (1) et on récupère $f(x)=x_0+jx_1+j^2x_2$ (2) et $f(x)=x_0+j^2x_1+jx_2$ (3).
En servant de l relation $1+j+j^2=0$, on obtient par manipulations de (1),(2) et (3) $x_0=\dfrac{1}{3}(x+f(x)+f^2(x)))$, $x_1=\dfrac{1}{3}(x+j^2f(x)+jf^2(x)))$ et $x_2=\dfrac{1}{3}(x+jf(x)+j^2f^2(x)))$.
Synthèse : On se donne $x\in E$ et x_0,x_1,x_2 donnés par les formules précédentes.
On a rapidement $x_0+x_1+x_2=x$ et, en utilisant la linéarité de f et l'égalité $f^3=id_E$, $x_k\in E_k$ pour tout k■
Exercice 6 : (Drapeau et trigonalisabilité)
Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n\geq 1$ et $f\in L(E)$, on appelle drapeau de f toute suite croissante (pour l'inclusion) de sev de E, stables par f, $(E_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ telle que $\forall i\in[\![0,n]\!],\dim(E_i)=i$.
f est trigonalisable ssi f possède un drapeau.
Solution :
Supposons f tz, il existe une base $b=(e_1,....,e_n)$ de E dans laquelle f est représenté par une matrice triangulaire supérieure. On pose alors $E_i=Vect(e_j,1\leq j\leq i)$, ce pour $i\in[\![0,n]\!]$. On constate aisément que $(E_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est un drapeau de f□
Inversement donnons nous un tel drapeau pour f et construisons (grâce à la chaîne d'inclusion $E_1\subset E_2\subset....\subset E_n$) selon le principe de la base incomplète une base $b'=(u_1,....,u_n)$ de E de sorte que $(u_1,....,u_i)$ soit une base de E_i, ce pour $i\in[\![1,n]\!]$. Dès lors la matrice (en vertu de la stabilité par f de chaque E_i) de f dans b' est triangulaire supérieure et f est trigonalisable■