Cours et méthodologie concernant la réduction

Dans ce qui suit n est un entier naturel non nul et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.

Cours Fin du IV) 3) : Propriétés du polynôme caractéristique

Proposition 1 *Soient $f \in L(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.*
i) Si $K = \mathbb{C}$, alors $Sp(f) \neq \emptyset$ et $Sp(A) \neq \emptyset$.
Dans ces conditions f possède au moins un vecteur propre.
ii) Si f (resp. A) est trigonalisable alors χ_f (resp.χ_A) est scindé sur $\mathbb{K}$.
(Cela vaut en particulier dans le cas où f et A sont diagonalisables)

Preuve 1 *i) Les valeurs propres étant racines du polynôme caractérisque et celui-ci étant de degré au moins égal à 1, il possède bien une racine (D'Alembert-Gauss) d'où la non vacuité des spectres*$\square$
C'est évidemment faux si on travaille avec des scalaires réels. Prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (et f_A) dont le polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ qui n'a pas de racine réelle donc pas de valeur propre.
ii) Notons $t_1, ..., t_n$ les éléments diagonaux (ce sont des éléments de $\mathbb{K}$) de A (ou d'une matrice triangulaire représentant f) alors $\chi_A(\lambda) = \chi_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - t_i)$; ce qui montre bien que ces polynômes caractéristiques sont scindés sur $\mathbb{K}$ $\blacksquare$

Méthodologie provisoire

Concernant les éléments propres

Pour ceux-ci tout est en place.
Soient $f \in L(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.
On désigne par x un élément de E et X un élément de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.
λ appartient lui à $\mathbb{K}$.
On note $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda id_E - f)$ et $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$, ce sont les polynômes caractéristiques de f et A.

A SAVOIR ABSOLUMENT 1 *i) λ est une valeur propre de $f \iff \exists x \neq 0_E, f(x) = \lambda.x$*
ii) λ est une valeur propre de $f \iff Ker(f - \lambda id_E) \neq \{0_E\}$.
iii) λ est une valeur propre de $f \iff f - \lambda id_E \notin GL(E)$.
iv) λ est une valeur propre de $f \iff \chi_f(\lambda) = 0$ (et $\lambda \in \mathbb{K}$).

Et l'analogue matriciel :

A SAVOIR ABSOLUMENT 2 *i) λ est une valeur propre de $A \iff \exists X \neq 0_{n,1}, AX = \lambda.X$*
ii) λ est une valeur propre de $A \iff Ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}$.
iii) λ est une valeur propre de $A \iff A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$.
iv) λ est une valeur propre de $A \iff \chi_A(\lambda) = 0$ (et $\lambda \in \mathbb{K}$).

Sur la diagonalisabilité

Là les caractérisations restent théoriques et vont évoluer.
On garde les notations utilisées précédemment.

A SAVOIR ABSOLUMENT 3 *Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*
i) f est diagonalisable(i.e E est la somme directe des espaces propres de f).
ii) Il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_s) \in \mathbb{K}^s$ tel que $E \subset \sum_{i=1}^{s} Ker(f - \lambda_i id_E)$.
(Noter alors que $Sp(f) \subset \{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$)
iii) Il existe une base de E, constituée de vecteurs propres de f.
iv) f est représenté par une matrice diagonale.

On dispose d'un analogue matriciel.

A SAVOIR ABSOLUMENT 4 *Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*
i) A est diagonalisable(i.e A est semblable à une matrice diagonale).
ii) $M_{n,1}(\mathbb{K}) \subset \sum_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A)$ (cette somme est directe).
iii) Il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_s) \in \mathbb{K}^s$ tel que $M_{n,1}(\mathbb{K}) \subset \sum_{i=1}^{s} Ker(A - \lambda_i - I_n)$.
(Noter alors que $Sp(A) \subset \{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$)