Devoir à la maison n° 2
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. L'équation (E_m) est définie lorsque $x^2+mx+4 \geq 0$. Le discriminant du trinôme vaut $\Delta = m^2-16$, donc $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > 4$ ou $m < -4$. Comme, de plus, le coefficient dominant du trinôme est positif :
   - si $m \in [-4,4]$ (cas $\Delta \leq 0$), alors (E_m) est définie sur $\mathbb{R}$.
   - si $m \in]-\infty,-4[\cup]4,+\infty[$, alors (E_m) est définie sur $]-\infty, x_1]\cup[x_2,+\infty[$ où $x_{1,2} = \dfrac{-m \pm \sqrt{m^2-16}}{2}$.
2. Dans ces deux cas, (E_m) est définie sur $\mathbb{R}$. Pour x dans $\mathbb{R}$, on a pour $m=4$:
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+4x+4} < x+1 &\iff \sqrt{(x+2)^2} < x+1\\ &\iff |x+2| < x+1\\ &\iff x+2 < x+1 \text{ (si } x \geq -2\text{) ou } -x-2 < x+1 \text{ (si } x \leq -2\text{)}\\ &\iff \text{impossible (si } x \geq -2\text{) ou } x > -\frac{3}{2} \text{ (si } x \leq -2\text{)},\end{aligned}$$
donc $S_1 = \emptyset$ et $S_2 =]-\infty,-2] \cap \left]-\dfrac{3}{2},+\infty\right[= \emptyset$, donc $S = S_1 \cup S_2 = \emptyset$.
Pour $m=-4$:
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-4x+4} < x+1 &\iff \sqrt{(x-2)^2} < x+1\\ &\iff |x-2| < x+1\\ &\iff x-2 < x+1 \text{ (si } x \geq 2\text{) ou } -x+2 < x+1 \text{ (si } x \leq 2\text{)}\\ &\iff \text{toujours vrai (si } x \geq 2\text{) ou } x > \frac{1}{2} \text{ (si } x \leq 2\text{)}\end{aligned}$$
donc $S_1 = [2,+\infty[$ et $S_2 =]-\infty,2] \cap \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[= \left]\dfrac{1}{2},2\right]$, donc $S = S_1 \cup S_2 = \left]\dfrac{1}{2},2\right] \cup [2,+\infty[= \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.
3. Pour $m=5$, on a $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2-16}}{2} = -4$ ou -1. Donc $D =]-\infty,-4] \cup [-1,+\infty[$. Pour x dans D :
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+5x+4} < x+1 &\implies x^2+5x+4 < (x+1)^2 = x^2+2x+1\\ &\implies x+1 < 0, \text{impossible puisque } 0 \leq \sqrt{x^2+5x+4} < x+1,\end{aligned}$$
donc $S = \emptyset$.

Exercice 2.

1. Soit x dans $\mathbb{R}$. On a :
$$f\circ(f\circ f)(x) = f(f\circ f(x)) = f(ax+b)$$
et
$$(f\circ f)\circ(x) = (f\circ f)(f(x)) = af(x)+b,$$
donc $f(ax+b) = af(x)+b$.

2. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$. D'après la question précédente, $f \circ g = g \circ f$. Or f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = a$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) \times f' \circ g(x) = f'(x) \times g' \circ f(x),$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ af'(ax + b) = af'(x).$$

Comme $a \neq 0$, on trouve l'égalité voulue.

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, notons P_n la proposition : $\left[\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'\left(\sum_{k=0}^{n-1} ba^k + a^n x\right)\right]$.

La proposition P_1 a été vérifiée à la question précédente.
Soit n dans $\mathbb{N}^*$, supposons P_n. Alors :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= f'\left(\sum_{k=0}^{n-1} ba^k + a^n x\right) && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= f'\left(a\left(\sum_{k=0}^{n-1} ba^k + a^n x\right) + b\right) && \text{d'après la question 2.} \\
&= f'\left(\sum_{k=1}^{n} ba^k + a^{n+1} x + b\right) \\
&= f'\left(\sum_{k=0}^{n} ba^k + a^{n+1} x\right),
\end{aligned}$$

donc P_{n+1} est vraie.
Donc P_1 est vraie et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n \Rightarrow P_{n+1}$, donc par récurrence, P_n est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

4. D'après la formule des sommes géométriques : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} ba^k = b \sum_{k=0}^{n-1} a^k = b\dfrac{1 - a^n}{1 - a}$.

En particulier, lorsque n tend vers l'infini, comme $a \in]-1, 1[$, on a $a^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $b\dfrac{1 - a^n}{1 - a} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{b}{1 - a}$, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ a^{n+1} x \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc, d'après la question précédente, en passant à la limite $n \to +\infty$, et comme f' est continue sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'\left(\dfrac{b}{1 - a}\right)$. Donc f' est constante sur $\mathbb{R}$.

5. Comme f' est constante sur $\mathbb{R}$, il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lambda$. Il existe donc μ dans $\mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda x + \mu$. Donc f est affine.

6. Soit f affine : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda x + \mu$. Alors $f \circ f(x) = \lambda^2 x + (\lambda + 1)\mu$, donc f est solution si et seulement si :

$$\begin{cases} \lambda^2 = a \\ (\lambda + 1)\mu = b. \end{cases}$$

Il n'y a donc pas de solution si $a < 0$, et si $a \geq 0$: $\begin{cases} \lambda = \pm\sqrt{a} \\ \mu = \frac{b}{1 \pm \sqrt{a}} \end{cases}$, donc les deux fonctions solutions sont $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{a}x + \frac{b}{1+\sqrt{a}}, \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\sqrt{a}x + \frac{b}{1-\sqrt{a}}. \end{cases}$