Centrale PC 2015 Corrigé des parties I et II

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul.
ω désignera l'endomorphisme nul de E.

Si f est un endomorphisme de E, pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f, c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F.
Pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E on définit la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des puissances de f par

$$\begin{cases} f^0 = id_E, \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \quad \text{pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré au plus égal à n.
Pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices carrées à n lignes et à éléments dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices colonnes à n lignes et à éléments dans $\mathbb{K}$.

I Première partie

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

I.A – Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.
Solution : Dans votre cours avec tous les détails nécessaires ■

I.B –

I.B.1) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f et donner un exemple d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.
Solution : E et $\{0_E\}$ sont stables par f et distincts par hypothèse énoncé. Pour la seconde partie de cette question, il suffit d'exhiber un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ n'ayant pas de droite vectorielle stable donc pas de valeur propre réelle. Ainsi l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient-il puisque son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ ■

I.B.2) Montrer que si E est de dimension finie $n \geqslant 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.
Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que trois sous-espaces stables.
Solution : Les trois sous-espaces de E suivants sont stables par f : E,$\{0_E\}$ et $Ker(f)$. De plus ils sont distincts deux à deux puisque $Ker(f) \neq \{0_E\}$ (f non injective) et $Ker(f) \neq E$ (puisque $f \neq \omega$).
Si maintenant n est impair, la formule du rang implique que $Im(f)$, stable par f, est différent de $Ker(f)$ et parce que f est non injective (= surjective ici) et non nul, cette image est différente aussi de E et $\{0_E\}$. Dans ce contexte E,$\{0_E\}$, $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont bien quatre sev de E stables par f.
Il suffit au vu de ce qui précède de considérer un endomorphisme non injectif et non nul dont l'image coincide avec le noyau (et dont la seule vp soit 0 ce qui est redondant avec l'information précédente). Ainsi l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient-il puisque $Ker(f) = Im(f) = Vect(0,1)$ et que $Sp(f) = \{0\}$■

I.C –

I.C.1) Montrer que tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres de f est stable par f. Préciser l'endomorphisme induit par f sur tout sous-espace propre de f.
Solution : Posons $F = Vect(x_1, ..., x_m)$, où chaque x_i est vecteur propre de F. Comme, pour tout i, $f(x_i) \in F$, F est bien stable par f.
Le cours nous assure que l'endomorphisme induit par f sur l'espace propre de f (associé à la vp λ) est l'homothétie (de cet espace propre) de rapport λ ■

I.C.2) Montrer que si f admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2 alors il existe une infinité de droites de E stables par f.
Solution : Toute droite incluse dans ce sous-espace vectoriel stable (qui est au moins un plan) est stable par f (car engendrée par un vecteur propre de f). Comme il existe une infinité de droites incluses dans un plan, cette assertion est prouvée ■

I.C.3) Que dire de f si tous les sous-espaces de E sont stables par f ?
Solution : Si f admet deux vp distinctes associées aux vecteurs propres x et y alors $x + y$ n'est pas vecteur propre de f donc f admet au plus une valeur propre. Par ailleurs en considérant $(e_1, ..., e_n)$ une base de E puisque chaque $Vect(e_i)$ est stable par f, ce dernier est diagonalisable. En conclusion f est dz et son spectre est réduit à un élément, f est donc une homothétie ■

I.D – Dans cette sous-partie, E est un espace de dimension finie.

I.D.1) Montrer que si f est diagonalisable alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire dans E stable par f. On pourra partir d'une base de F et d'une base de E constituée de vecteurs propres de f.
Solution : Notons $b = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, constituée de vecteurs propres de f et considérons F un sev de E stable par f.
Le théorème de la base incomplète dans sa version forte (programme première année), on peut compléter une base de F (donc une famille libre) en une base de E en y ajoutant des vecteurs de b qui forment une famille b'. Dès lors $Vect(b')$ est un supplémentaire de F (dans E), stable par f d'après I.C.1)■

I.D.2) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire dans E stable par f, alors f est diagonalisable. Qu'en est-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?
Solution : Notons F la somme (directe) des sous-espaces propres de f. Supposons que $F \neq E$ en procédant par l'absurde (on notera donc que tous les vecteurs propres de f sont dans $F - 0_E$). On peut alors trouver G un supplémentaire de F (dans E) qui soit stable par f et, en notant g l'endomorphisme de G induit par f, considérer un vecteur propre de g (tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ ev de dimension finie, **non nulle** admet vp et vecteur propre) qui est aussi un vecteur propre de f et qui devrait être à la fois dans F et G tout en étant non nul; c'est absurde et $F = E$ donc f est bien dz.
En prenant f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$utilisé comme contre exemple en I.A, on voit que c'est alors faux si le corps des scalaires est $\mathbb{R}$ puisque ici les seuls sev stables sont E et $\{0_E\}$, qu'ils sont supplémentaires et que f n'est pas diagonalisable puisque son spectre est vide ■

II Deuxième partie

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, qui admet p valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et, pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i.

II.A – Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$.

II.A.1) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \oplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$ est stable par f.
Solution : F étant par l'égalité $F = \oplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$ engendré par des vecteurs propres de f est bien stable par f par I.C.1)■

II.A.2) Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F. Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ dans $E_1\times\cdots\times E_p$ tel que $x=\sum_{i=1}^{p} x_i$.

Solution : f est dz donc E est la somme directe des E_i ($1\leq i\leq p$), d'où existence et unicité de l'objet demandé ■

II.A.3) Si on pose $H_x=\{i\in [\![1,p]\!] \mid x_i\neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que $H_x=[\![1,r]\!]$ avec $1\leqslant r\leqslant p$. Ainsi on a $x=\sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i\in E_i\setminus\{0\}$ pour tout i de $[\![1,r]\!]$.

On pose $V_x=(x_1,\dots,x_r)$.

Montrer que $\mathcal{B}_x=(x_1,\dots,x_r)$ est une base de V_x.

Solution : Par sa définition $\mathcal{B}$ engendre V_x; les vecteurs de cette famille étant des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, elle est aussi libre donc base de V_x■

II.A.4) Montrer que pour tout j de $[\![1,r]\!]$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1\leqslant j\leqslant r}$ dans la base $\mathcal{B}_x$.

Solution : Puisque chaque x_i est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i, il vient par linéarité et simple itération : $f^{j-1}(x)\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{j-1}x_i$. Donc la matrice cherchée (elle sera notée M) est $(\lambda_j^{i-1})_{1\leq i,j\leq r}$.

Par ailleurs la stabilité de F par f et le fait que $x\in F$ impliquent bien que chaque $f^k(x)\in F$, ce pour tout $k\in\mathbb{N}$, donc la famille $\mathcal{B}_x$ est une bien une famille de F ■

II.A.5) Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1\leqslant j\leqslant r}$ est une base de V_x.

Solution : Le déterminant de M (cf question précédente) étant un déterminant de Vandermonde non nul (les λ_i étant deux à deux différentes), $(f^{j-1}(x))_{1\leqslant j\leqslant r}$ est une base de V_x ■

II.A.6) En déduire que pour tout i de $[\![1,r]\!]$, x_i appartient à F et conclure.

Solution : On pose $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}x\\ \vdots\\ f^{r-1}(x)\end{pmatrix}$. La question II.A.4) peut se traduire en l'égalité matricielle : $MX=Y$ ou de façon équivalente $X=M^{-1}Y$; ce qui prouve que chaque x_i est CL de $x,\dots,f^{r-1}(x)$ donc est bien élément de F. La conclusion en découle par double inclusion ■

II.B – Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où $p=n$.

II.B.1) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $[\![1,p]\!]$.

Solution : Etant donné que f possède $n=dimE$ vp, chaque espace propre est une droite vectorielle ■

II.B.2) Combien y a-t-il de droites de E stables par f?

Solution : Par I.A.1) et la question qui précède, nous obtenons n droites vectorielles stables par f ■

II.B.3) Si $n\geqslant 3$ et $k\in[\![2,n-1]\!]$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?

Solution : Par la partie II, tout espace stable par f est engendré par des vecteurs propres de f et vice-versa. Or il y a $\begin{pmatrix}n\\ k\end{pmatrix}$ parties parmi l'ensemble des vecteurs propres $x_1,\dots,x_n$ donc nous disposons bien de $\begin{pmatrix}n\\ k\end{pmatrix}$ de sous-espaces de F et de dimension k, stables par f ■

II.B.4) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas? Les donner tous.

Solution : La formule précédente est valable pour $k = 0, 1, n$, il y en a donc 2^n (somme des $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, si $0 \leq k \leq n$). Ce sont outre 0_E les sev engendrés par les vecteurs propres de f■