TD 10 : Réduction I (Corrigé)

Exercice 1 : (Polynôme caractéristique)
Soient A, B deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$ dont l'un au moins est inversible.
Etablir que AB et BA ont même polynôme caractéristique.
Exercice 2 : (CCINP PSI)
Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ de rang un et f_A son endomorphisme canoniquement associé.
1) En utilisant une base de $\mathbb{K}^n$ adaptée à $Ker(f_A)$, montrer que f_A est représenté par une matrice M de $M_n(\mathbb{K})$ dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles et la dernière non.
2) Etablir que A est diagonalisable ssi M l'est.
3) Calculer M^2. En déduire un polynôme annulateur de M.
4) Prouver que A est diagonalisable ssi $tr(A) \neq 0$.
Solution :
1) Puisque le rang de A vaut 1 : $\dim(Ker(f_A)) = n-1$ (formule du rang). Considérons alors une base $(x_1, ..., x_{n-1})$ du noyau précédent que l'on complète avec x_n pour en faire une base de $\mathbb{K}^n$; elle sera notée b.
Comme $x_n \notin Ker(f_A)$, nous avons $f_A(x_n) = (a_1, ..., a_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ (i.e au moins un des $a_i \in \mathbb{K}^*$).
Dès lors les $n-1$ premières colonnes de M, la matrice de f_A dans la base b, sont nulles puisque $f_A(x_i) = 0_{\mathbb{K}^n}$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ et sa dernière colonne valant $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ donc n'étant pas nulle, M répond bien aux exigences voulues■
2) Il suffit de montrer (par symétrie de la relation de similitude) que si $A \sim M$ et A dz alors M est aussi dz.
Puisque A dz, il existe une matrice diagonale telle que $A \sim D$ et par transitivité de $\sim$, il vient $M \sim D$ donc ce que l'on souhaitait■
3) Un calcul de M^2 direct (mais que l'on peut encore plus immédiat en partageant M en blocs) donne $M^2 = a_n M$.
Ainsi $P = X^2 - a_n X = X(X - a_n)$ est polynôme annulateur de M.
On notera que $a_n = tr(M) = tr(A)$ car la trace est un invariant de similitude■
4) La question précédente montre que si $tr(A) \neq 0$, P est un polynôme annulateur de M scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples donc que M et A sont dz.
Si la trace de A est nulle, $M^2 = 0_n$ donc M est nilpotente et non nulle donc (cf cours) elle n'est pas dz■
Exercice 3 : (CCINP)
Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ de trace non nulle et $f : M \in M_n(\mathbb{K}) \to tr(A)M - tr(M)A$.
1) Vérifier que $f \in L(M_n(\mathbb{K}))$.
On note H le sev de $M_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices de trace nulle et on pose $a = tr(A)$.
2) Etablir que $X(X - a)$ est un polynôme annulateur de f. Que peut-on en déduire?
3) Prouver que $E_a(f) = H$ et que $E_0(f) = Vect(A)$.
Solution :
1) Résulte de la linéarité de la trace■
2) Pour tout $M \in M_n(\mathbb{K})$, $f(f(M)) = tr(A)(tr(A)M - tr(M)A) - 0_n = af(M)$ donc $f^2 - af$ est l'endomorphisme nul. Il en résulte que $X(X-a)$ est un polynôme annulateur de f. Ce polynôme annulateur de f étant scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples (car $a \neq 0$), f est donc diagonalisable et $Sp(f) \subset \{0, a\}$■
3) Le spectre de f ne pouvant être réduit à un singleton puisque f n'est pas une homothétie, O et a sont des valeurs propres de f.
$M \in E_a(f) \iff f(M) = aM \iff -tr(M)A = 0_n$. Comme $A \neq 0_n$ (puisque sa trace est non nulle. On a bien $E_a(f) = H$.
On voit bien sûr que $f(A) = 0_n$ donc que $Vect(A) \subset Ker(f) = E_0(f)$. Inversement si $M \in Ker(f)$ alors $M = \dfrac{tr(M)}{a} A$ donc inclusion réciproque et réponse à la question posée■
Exercice 4 : (X)
Soient A, B deux éléments de $M_n(\mathbb{C})$.
Montrer que ces matrices ont une valeur propre commune si et seulement si il existe $M \in M_n(\mathbb{C})$, $M \neq 0_n$

telle que $AM = MB$.
Solution :
Exercice 5 : (CCINP 2024 écrit Partie I partielle)
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A.
0n considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice A.

1. Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

2. Montrer qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si et seulement si $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de D.

3. Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D. Montrer que les matrices D et Δ commutent, puis en déduire que la matrice Δ est diagonale.

4. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de D, puis l'ensemble des racines cubiques de A. On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ.

Exercice 6 : (Mines)
Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^4 = f^2$ et qui admet -1 et 1 comme valeurs propres.
f est-il diagonalisable?
Solution :
Listons nos hypothèses : a) $f \in L(\mathbb{R}^3)$. b) $X^4 - X^2 = X^2(X^2 - 1)$ est un polynôme annulateur de f. c) Donc $Sp(f) \subset \{0, -1, 1\}$. d) $\{-1, 1\} \subset Sp(f)$.
Deux cas s'offrent à nous : i) $Sp(f) = \{0, -1, 1\}$ auquel cas le cardinal du spectre est égal à la dimension de R^3 donc par CS f est dz.
ii) $Sp(f) = \{-1, 1\}$ donc $0 \notin Sp(f)$ soit $f \in GL(R^3)$ et en composant par f^{-1} deux fois par la gauche chaque membre de $f^4 = f^2$, nous obtenons $f^2 = id_E$ soit f symétrie de E et f est dz$\blacksquare$
Exercice 7 : (Centrale)
Les matrices blocs suivantes $A = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ sont elles diagonalisables?
Solution :
La forme des matrices suggère un calcul par blocs. On a $A^2 = A$ qui montre que A est dz car matrice de projection.
Puis $B^2 = 2B - I_{2n}$ donc $(X - 1)^2$ est un polynôme annulateur de B et ainsi le spectre de B est soit vide soit réduit au singleton $\{1\}$. Dans les deux cas B ne peut être dz puisque B n'est pas une matrice scalaire$\blacksquare$