DS 2 (Corrigé).

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices, problèmes sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler une erreur d'énoncé, vous êtes prié de le signaler sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous prendriez.

Calculatrices autorisées.

Les exercices sont de difficulté croissante. Les trois premiers d'entr'eux sont OBLIGATOIRES et proches du cours. Toute réponse mitigée à ces exercices influera sur le jugement général de votre copie.

Exercice 1 (Algèbre)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$.
1) Simplifier, en détaillant les propriétés utilisées, $tr(\frac{tr(M)}{n}I_n)$ et $\det(\det(M)M)$.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur M pour que l'ensemble des matrices semblables à M soit un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
3) Prouver que le spectre d'une matrice nilpotente est $\{0\}$.

★

Solution :
1) Par linéarité de la trace on a $tr(\frac{tr(M)}{n}I_n) = \frac{tr(M)}{n}tr(I_n) = \boxed{\text{tr(M)}}$□
Puis par propriété du déterminant, il vient $\det(\det(M)M) = (\det(M)^n \det(M) = \boxed{(\det(M))^{n+1}}$□
2) Il faut que 0_n soit dans cet ensemble donc que M soit semblable à 0_n d'où $M = 0_n$. Cette condition est suffisance puisque dans ce cas l'ensemble des matrices semblables à M est $\{0_n\}$ qui est un sev de $M_n(\mathbb{R})$.
Ainsi une CNS est $\boxed{M = 0_n}$□
Notons A une matrice nilpotente d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$.Il existe donc un entier naturel $p \geq 1$ tel que $A^p = 0_n$; ainsi en appliquant le déterminant à chaque membre : $(\det(A))^p = 0$ soit $\det(A) = 0$ ou $A \notin GL_n(\mathbb{K})$. Ce qui signifie que $\boxed{0 \in Sp(A)}$□
Inversement si $\lambda \in Sp(A)$, il existe $X \neq 0_{n,1}$ tel que $AX = \lambda X$. D'où $A^pX = \lambda^pX$ (par propriété des éléments propres) soit $\lambda^pX = 0_{n,1}$ (et toujours $X \neq 0_{n,1}$) donc $\lambda = 0$, ce qui peut se formuler en $Sp(A) \subset \{0\}$□
(L'inclusion précédente s'obtient plus rapidement en observant que X^p est un polynôme annulateur de A)
L'égalité voulue s'obtient avec les deux encadrés précédents■

Exercice 2 (Séries)
1) Enoncer le théorème de Leibniz dans son intégralité.
2) Peut-on déterminer la nature d'une série à termes positifs dont on sait seulement que son terme général u_n est un $O(1/n)$?
On justifiera sa réponse.
3) La série de terme général $v_n = \arctan(n^2 + n + 1) - \arctan(n^2 - n + 1)$, où $n \in \mathbb{N}$, est-elle convergente? Si oui, en calculer la somme.
(On pourra utiliser le lien suite-série que l'on formulera précisément en remarquant que $(n+1)^2-(n+1)+1 = n^2 + n + 1$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.).

★★

Solution :
2) Non puisque en prenant $u_n = \frac{1}{n}$, on dispose du terme général d'une série divergente alors que si on choisit

$u_n = \dfrac{1}{n^2}$, notre série converge$\square$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \arctan(n^2 - n + 1)$. La suite (w_n) converge vers $\dfrac{\pi}{2}$ (qui est on le sait la limite de la fonction arctan en $+\infty$). Donc, par le lien suite/série, la série $\sum\limits_{n\geq 0}(w_{n+1} - w_n)$ converge. Comme $\forall n,\ w_{n+1} - w_n = v_n$ a série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ est bien convergente. En revenant aux sommes partielles de cette série et par télescopage on : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = w_{n+1} - w_0 \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{\pi}{2} - \arctan(1)$.

Bilan : $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n = \dfrac{\pi}{4}}$ $\blacksquare$

Exercice 3 (Algèbre)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier, en détaillant les calculs, que $P = X^2(X+1)$ est un polynôme annulateur de A.
2) Que peut-on en déduire pour le spectre de A?
3) Préciser le rang de A ainsi que celui $A + I_3$.
Préciser alors le spectre de A.
4) Déterminer $Ker(A)$ et $Ker(A + I_3)$.
5) A est-elle diagonalisable?

★★★

Solution :

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $\boxed{A^2(A+I_3) = 0_3 \Longleftrightarrow P(A) = 0_3}$ donc P est bien un polynôme annulateur de $A$$\square$

2) Par propriété du spectre : $\boxed{Sp(A) \subset \{0, -1\}}$ puisque 0 et -1 sont les racines de P, polynôme annulateur de A $\square$

3) On a par simple examen de colonnes que $rg(A) = 2 = rg(A + I_3)$, ce qui montre (formule du rang) que $\dim(Ker(A)) = \dim(Ker(A + I_3)) = 3 - 2 = 1 \neq 0$.

Ainsi 0 et -1 sont des valeurs propres de A. Avec 2), il vient $\boxed{Sp(A) = \{0, -1\}}$$\square$

4) Toujours par examen de colonnes, on trouve rapidement $\boxed{E_0(A) = Ker(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ puis

$\boxed{E_{-1}(A) = Ker(A + I_3) = Vect\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$\square$

5) La somme (directe) des espaces propres de A étant la somme de deux droites vectorielles ne peut être égale à $M_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3. $\boxed{\text{A n'est pas diagonalisable}}$$\blacksquare$

Exercice 4 (Centrale PC)

Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites à termes complexes.

On pose, pour tout $n \geq 1, B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

1) Etablir que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k$, ce pour $n \geq 2$.

On suppose maintenant que $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels décroissante, convergeant vers 0. On suppose en outre que la suite (B_n) est bornée.

2) Prouver que la série $\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n+1})B_n$ converge absolument.

3) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ converge.

Une première application

Soit θ un réel qui n'est pas un multiple entier de 2π.

4) Vérifier que : $\forall n \geq 1, |\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|}$.

5) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

6) Que dire des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$, où x est un réel?

Une dernière application

7) Démontrer, en utilisant la question 3), le théorème de Leibniz sur les séries alternées dans sa partie convergence seulement.

★★★★

Solution :

1) Fixons $n \geq 2$ et partons du membre de droite, noté D.

$D = a_nB_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_kB_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}B_k$ (Linéarité somme)

D'où $D = a_nB_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_kB_k - \sum_{k=2}^{n} a_kB_{k-1}$ (Changement d'indice dans la dernière somme)

Donc $D == a_nB_n + \sum_{k=2}^{n-1} a_k(B_k - B_{k-1}) + a_1B_1 - a_nB_{n-1}$ (En regroupant les 2 sommes dans leur intervalle de sommation commun, à savoir $[\![2, n-1]\!]$ et en isolant les termes d'indice 1 et n).

Puis en regroupant le premier terme et le dernier et en l'incorporant à la somme, il vient :

$D = \sum_{k=2}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) + a_1B_1$.

Mais $B_k - B_{k-1} = b_k$, ce pour tout $k \geq 2$ et $B_1 = b_1$ soit enfin $\boxed{D = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k}$ □

2) Nous noterons T_n la somme partielle d'odre n de la STP $\sum_{n\geq 1} |(a_n - a_{n+1})B_n|$.

Nous allons montrer que la suite (T_n) est majorée, ce qui assurera la convergence de la STP dont elle est la suite des sommes partielles donc aussi de la convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n+1})B_n$.

On observe (grâce à la décroissance de la suite (a_n) que $\forall k \geq 1$, $|(a_k - ak + 1)B_k| = |a_k - ak + 1||B_k| = (a_k - ak + 1)|B_k|$.

Mais la suite (B_n) étant bornée, il existe un réel positif M tel que $\forall k \geq 1$, $|B_k| \leq M$. De ceci on tire que :

$T_n = \sum_{k=1}^{n} |(a_k - ak + 1)B_k| = \sum_{k=1}^{n}(a_k - ak + 1)|B_k| \leq \sum_{k=1}^{n}(a_k - ak + 1)M = M(a_1 - a_{n+1})$ (après télescopage) et ce pour tout $n \geq 1$.

On conclut en observant que la suite (a_n) convergeant, elle est bornée : on peut trouver un réel positif K tel que $\forall k \geq 1$, $|a_k| \leq K$. Dès lors $\forall n \geq 1$, $T_n \leq 2MK$ et la suite (T_n) est bornée □

3) On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k$, $C_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - ak + 1)B_k$, pour $n \geq 1$.

En vertu de la relation obtenue en 1) : $A_n = a_nB_n + C_{n-1}$, pour tout $n \geq 1$.

On reconnaît en (C_n) la suite des sommes partielles d'une série convergente (car absolument convergente cf 2)), en tant que telle cette suite converge. Par ailleurs (a_nB_n) est une suite qui converge vers 0 (comme produit d'une telle suite par une suite bornée).

A_n se voit donc comme la somme de deux termes de suites convergentes, ainsi la suite (A_n) converge mais c'est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$; cette dernière converge bien$\square$
4) On commence par évaluer, à n fixé,(on reconnaît une somme géométrique bien classique et de raison $e^{i\theta} \neq 1$ car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$) $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^{n} (e^{i\theta})^k = e^{i\theta}\dfrac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}$.
Une utilisation de l'arc moitié fournit par ailleurs $\dfrac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} = \dfrac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$.
Finalement $|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}| = |\dfrac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}| \leq \dfrac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|}$$\square$
5) Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = 1/n$ et $b_n = e^{in\theta}$, la suite (a_n) décroît vers 0 et la suite (B_n) (cf première partie) est bornée comme le montre la question 4).
Il découle de la question 3) que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ converge$\square$
6) Pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la convergence de la série de terme général complexe $\dfrac{e^{inx}}{n}$ (cf 5)) assure celles de termes généraux $\Re(\dfrac{e^{inx}}{n}) = \dfrac{\cos(nx)}{n}$ et $\Im(\dfrac{e^{inx}}{n}) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$.
Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, la première série est la série harmonique donc divergente, la seconde la série nulle donc convergente$\square$
7) On prend pour (a_n) une suite décroissante convergeant vers 0 et pour tout $n \geq 1$, on pose $b_n = (-1)^n$.
On voit que B_n vaut alernativement -1 et 0 donc que la suite (B_n) est bornée d'où par 3) la convergence de la série alternée (répondant aux hypothèses du théorème de Leibniz)$\blacksquare$

Un peu de culture

La transformation d'Abel (question 1)) est l'analogue discret (l'intégrale est remplacée par une somme finie) de l'intégration par parties; elle permet donc de prouver la semi-convergence de certaines séries (cf 5) car dans cette question il n'y a pas ACV).
Le résultat de la question 3) accompagnée des hypothèses données sur les suites (a_n) et (B_n) est connue sous le nom de règle d'Abel. Abel était un mathématicien norvégien prodige, malheureusement mort bien jeune (27 ans).
Utilisez cette régle et un peu de trigonométrie pour montrer que les séries de la question 6) ne sont pas ACV (sauf dans un cas trivial pour la seconde).

Exercice 5 (Preuve par Harm Derksen du théorème de d'Alembert-Gauss)

L'objectif du problème est de montrer que tout élément non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe. Il faudra donc être attentif à ne pas utiliser une conséquence de ce résultat (par exemple : un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle admet nécessairement une valeur propre; c'est d'ailleurs un des buts de ce sujet.)
En revanche, on pourra utiliser librement (leur preuve ne résultant pas du théorème à prouver) les faits suivants :
• Une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$ possède deux racines complexes.
• Un polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.

Notations. Terminologie. Rappels

Pour $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$.
Pour $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{k,l}$ l'élément de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté le coefficient, situé à la k-ième ligne et à la l-ième colonne, qui, lui, vaut 1. La famille $(E_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$.
Si $M \in M_n(\mathbb{K})$ et $j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(M) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ désigne la j-ième colonne de la matrice M.
Deux endomorphismes u, v d'un même espace vectoriel sont permutables si $uov = vou$.
On rappelle que, pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $f \in L(E)$ (E étant un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n), $\det(\lambda I_n - A)$ et $det(\lambda id_E - f)$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré n, unitaires et dont les racines dans K sont les valeurs propres de A (resp. de f).

Préambule

1) Quels sont les vecteurs propres d'une homothétie?
2) Soient M, M' de $M_n(\mathbb{K})$) et $j \in [\![1,n]\!]$.
Que représente $MC_j(M')$ pour la matrice produit MM'?

Premiers résultats

3) Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ ainsi que u et v deux endomorphismes permutables de E.
a) Montrer que $Ker(u - \lambda Id_E)$ et $Im(u - \lambda Id_E)$ sont stables par u et v, ce pour tout λ de $\mathbb{K}$.
b) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n > 1$ impair, prouver que E possède au moins un sous espace vectoriel strict (i.e $\neq E$) de dimension impaire, stable par u et v.
c) En déduire que deux endomorphismes permutables d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension impaire possèdent au moins un vecteur propre en commun.

Cas d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension impaire

n est impair et $F = \{M \in M_n(\mathbb{C}), M^t = \overline{M}\}$.
4) Montrer que F est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
5) Etablir que la juxtaposition des familles $(E_{1,1}.....E_{n,n})$, $(E_{kl} + E_{lk})_{1 \leq k < l \leq n}$ et $(i(E_{kl} - E_{lk}))_{1 \leq k < l \leq n}$ forme une base de F. De quelle parité est la dimension de F?
6) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$; on considère alors les applications u, v définies sur F par :
$u(M) = \dfrac{1}{2}(AM + M^t\overline{A})$ et $v(M) = \dfrac{1}{2i}(AM - M^t\overline{A})$.
a) Vérifier que u et v sont des endomorphismes de F permutables.
Par ce qui précède on peut considérer M_0 un élément de F, vecteur propre commun à u et v.
On pose alors $u(M_0) = \lambda M_0$ et $v(M_0) = \mu M_0$, où λ et μ sont des réels.
b) Exprimer AM_0 en fonction de M_0 et prouver soigneusement que $\lambda + i\mu$ est une valeur propre de A.
7)a)Justifier que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension impaire possède au moins une valeur propre.
b) Montrer alors que deux endomorphismes permutables d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension impaire possèdent au moins un vecteur propre en commun.

Etude du cas général

On pose $n = 2^k p$, où k entier naturel et p entier naturel impair.
On considère alors l'assertion (P_k) :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout } p \text{ impair et tout } E\ \mathbb{C} \text{ espace vectoriel de dimension } 2^k p : \\ i)\ \text{Tout élément de } L(E) \text{ posède une valeur propre (au moins).} \qquad . \\ ii)\ \text{Deux éléments permutables de } L(E) \text{ ont un vecteur propre commun.}\end{array}\right.$$

On raisonne par récurrence en supposant P_l vraie pour tout $l < k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour cela on considère p impair et E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension $2^k p$.

Etude de l'assertion i)

Soit $f \in L(E)$, représenté par la matrice A et on note $G = \{M \in M_n(\mathbb{C}), M^t = -M\}$.
8) Donner la dimension de G en tant que sev de $M_n(\mathbb{C})$.
9) On définit deux applications u, v (pour tout $M \in G$) par :$u(M) = AM + M^t A$, $v(M) = AM^t A$.
a) Etablir que ce sont des endomorphismes permutables de G.
b) Justifier l'existence de $N_0 \in G$ vecteur propre commun à u et v.
On pose $u(N_0) = \lambda N_0$ et $v(N_0) = \mu N_0$, où λ et μ sont des complexes.
c)i)Vérifier que $\left(A^2 - \lambda A + \mu I_n\right) N_0 = 0_n$.
On note W un vecteur colonne non nul de N_0 et α, β les racines complexes de $X^2 - \lambda X + \mu$.
ii) Prouver que α ou β est valeur propre de A.

Etude de l'assertion ii)

Soient f, g deux éléments permutables de $L(E)$. On note V un sous espace de E stable par f et g de sorte que $\dim V = 2^k q$ où q impair est minimal.
10) Justifier sommairement l'existence de V ainsi que celle de $\lambda \in Sp\left(f_{/V}\right)$.
11) Montrer que f et g possédent un vecteur propre en commun dans V.
Conclure.

Le théorème de d'Alembert-Gauss

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ ainsi que f l'endomorphisme canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \vdots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & (0) & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

12) Vérifier que P est le polynôme caractéristique de A (i.e que $\det(\lambda I_n - A) = P(\lambda)$).
13) En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.
Solution :
1) Une homothétie de E admet E comme seul espace propre ainsi $\boxed{\text{tout vecteur non nul de } E}$ est vecteur propre de cette homothétie□
2) C'est, par définition du produit matriciel, la j-ième colonne de la matrice MM'□
3)a) On sait que si deux endomorphismes sont permutables, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre. Comme $u - \lambda Id_E$ commute avec u et avec v (puisque u et v permutables), on a bien stabilité par u et v du noyau et de l'image de $u - \lambda Id_E$□
b) **Premier cas :** si u et v sont des homothéties, n'importe quelle droite vectorielle fait l'affaire.
Second cas : la symétrie des hypothèses nous permet donc de supposer que u n'est pas une homothétie.
Puisque n est impair et que X_u est un polynôme à coefficients réels de degré n,, il possède une racine réelle, notée λ. La formule du rang et toujours l'imparité de $n = \dim(E)$, appliquée à $u - \lambda Id_E$ fait que $Ker(u - \lambda Id_E)$ ou bien $Im(u - \lambda Id_E)$ est de dimension impaire.
Si c'est l'image, comme le noyau est au moins de dimension 1, elle ne peut être égale à E (toujours en vertu de la formule du rang).
Si c'est le noyau, en admettant qu'il soit égal à E tout entier, cela signifierait que u est l'homothétie λid_E, ce qui est absurde.
Ainsi dans ce cas ou le noyau ou l'image de $u - \lambda Id_E$ fournit un sev de E, strict et de dimension impaire□
c) On raisonne par récurrence en émettant, pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'hypothèse (H_m) :
$\boxed{\text{Deux endomorphismes permutables de } H, \mathbb{R} \text{ ev de dimension impaire} \leq 2m+1, \text{ ont un } \overrightarrow{vp} \text{ en commun.}}$
L'initialisation va de soi puisque tous les endomorphisme en dimension 1 sont des homothéties pour tout vecteur non nul est propre.
Supposons (H_m) établie et donnons nous S, $\mathbb{R}$ ev de dimension $2m+3$, ainsi que u et v des endomorphismes permutables de S. Le b) met en évidence H sev strict de S, de dimension impaire (donc de dimension $\leq 2m+1$), stable par u et v. On note alors u' et v' les endomorphismes de H induits par u et v, ils sont permutables et on peut donc leur appliquer (H_m) et possèdent ainsi un vecteur propre en commun qui est aussi vecteur propre commun de u et v. La récurrence se poursuit...□
4) Il faut d'abord considérer $M_n(\mathbb{C})$ comme un $\mathbb{R}$ ev puis montrer que F en est un sev.
i) Par définition $F \subset M_n(\mathbb{C})$.
ii) La matrice nulle appartient à F.
DANS LE CORRIGE LA TRANSPOSITION SE NOTE PAR LA GAUCHE !!
iii) Soient $(N, M, \partial) \in F^2 \times \mathbb{R}$, alors (linéarité transposition) :
${}^t(M + \partial N) = {}^tM + \partial {}^tN = \overline{M} + \partial \overline{N}$ (M, N dans F) donc puisque ∂ réel et par propriété de la transposition et de la conjugaison il vient enfin ${}^t(M + \partial N) = \overline{M + \partial N}$.
F est une partie non vide de $M_n(\mathbb{C})$, stable par combinaison linéaire; c'est bien un $\mathbb{R}$ sev de $M_n(\mathbb{C})$□
5) Soit $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ alors ${}^tM = \overline{M} \Leftrightarrow a_{ji} = \overline{a_{ij}}$, ce pour $1 \leq i, j \leq n$.
Ceci équivaut à $a_{ii} \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq n$ et pour $i < j$ $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$.

Ou encore $M=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}E_{ii}+\sum_{1\leq k<l\leq n}Re(a_{kl})\left(E_{kl}+E_{lk}\right)+\sum_{1\leq k<l\leq n}Im(a_{kl})i\left(E_{kl}-E_{lk}\right)$.
De cette décomposition , il résulte bien que : $(E_{ii})_{1\leq i\leq n}\cup(E_{kl}+E_{lk})_{1\leq k<l\leq n}\cup(i(E_{kl}-E_{lk}))_{1\leq k<l\leq n}$ engendre F et que c'est aussi une famille de cet ev.
Maintenant si $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$, $(\beta_{kl})_{1\leq k<l\leq n}$, $(\gamma_{kl})_{1\leq k<l\leq n}$ des réels tels que :
$\sum_{i=1}^{n}\alpha_iE_{ii}+\sum_{1\leq k<l\leq n}\beta_{kl}\left(E_{kl}+E_{lk}\right)+\sum_{1\leq k<l\leq n}\gamma_{kl}i\left(E_{kl}-E_{lk}\right)=0_n$.
On a donc $\sum_{i=1}^{n}\alpha_iE_{ii}+\sum_{1\leq k<l\leq n}\left(\beta_{kl}+i\gamma_{kl}\right)E_{kl}+\sum_{1\leq k<l\leq n}\left(\beta_{kl}-i\gamma_{kl}\right)E_{lk}=0_n$, et en utilisant la liberté de la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$ il vient $\alpha_i=0, 1\leq i\leq n$ et $\beta_{kl}+i\gamma_{kl}=0, 1\leq k<l\leq n$ donc tous les réels α_i et β_{kl},γ_{kl} sont nuls et la liberté de notre famille est prouvée, c'est donc bien une base de F.
Le cardinal de cette base est $n+2\dfrac{n(n-1)}{2}=n^2$ qui est impair puisque n l'est$\square$
6) Les applications sont effectivement linéaires par propriété des matrices.
Sont elles à valeurs dans F?
Pour tout $M\in F$: (par propriétés transposition) :
${}^tu(M)=\dfrac{1}{2}\left({}^tM{}^tA+\overline{A}{}^tM\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overline{M}{}^tA+\overline{AM}\right)$.
Or , grâce aux propriétés de la conjugaison , notamment
$\overline{UV}=\overline{U}\overline{V}$:$\dfrac{1}{2}\left(\overline{M}{}^tA+\overline{AM}\right)=\overline{u(M)}$. Ainsi u à valeurs dans F.
On procède de même avec v.
Pour tout $M\in F$:
$uov(M)=\dfrac{1}{2}A(\dfrac{1}{2i}(AM-M{}^t\overline{A}))+(\dfrac{1}{2i}(AM-M{}^t\overline{A})){}^t\overline{A})$ soit
$uov(M)=\dfrac{1}{4i}(A^2M-M({}^t\overline{A})^2)$ et
$vou(M)=\dfrac{1}{2i}(A\dfrac{1}{2}(AM+M{}^t\overline{A}))-\dfrac{1}{2}(AM+M{}^t\overline{A})){}^t\overline{A})$ ou
$vou(M)=\dfrac{1}{4i}(A^2M-M({}^t\overline{A})^2)$ donc
$uov=vou\square$
b) L'existence de M_0 et des valeurs propres associées est validée par la partie précédente puisque nous sommes dans un $\mathbb{R}$ ev de dimension impaire.
De plus $u(M_0)+iv(M_0)=AM_0\Rightarrow AM_0=(\lambda+i\mu)\,M_0$. Puisque M_0 est un vecteur propre $M_0\neq 0_F$, considérons X un vecteur colonne non nul de M_0 alors, par définition du produit matriciel (cf préambule), on a : $\boxed{AX=(\lambda+i\mu)\,X\Rightarrow Sp(A)\neq\emptyset}\square$
7)a) Nous venons de démontrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ possédait une valeur propre. Si on considère un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ ev de dimension impaire, en considérant une matrice le représentant on aura donc le même résultat$\square$
b) Il suffit de reprendre la partie Premiers résultats et d'y remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}\square$
8) Comme $G=A_n(\mathbb{C})$, $\boxed{\dim G=\dfrac{n(n-1)}{2}}\square$
9)a) Vérifications similaires à celles détaillées en 6)a)$\square$
b) Avec $n=2^kp$, $\dim G=\dfrac{n(n-1)}{2}=2^{k-1}p(2^kp-1)$ or $k\geq 1$ soit $p(2^kp-1)$ est impair et, par hypothèse de récurrence appliquée à u,v endomorphismes de G permutables, on peut trouver un vecteur propre commun $N_0\square$
c)i) Nous disposons de : $AN_0+N_0\left({}^tA\right)=\lambda N_0$ et $AN_0\left({}^tA\right)=\mu N_0$ donc $A^2N_0+AN_0\left({}^tA\right)=\lambda AN_0$ ou $A^2N_0-\lambda AN_0+\mu N_0=0_n\square$
ii) On a donc $(A-\alpha I_n)\,(A-_n)N_0=0_n\Rightarrow(A-\alpha I_n)\,(A-\beta I_n)W=0_{n,1}$.
Ainsi soit $(A-\beta I_n)W=0_{n,1}$ et $\beta\in Sp(A)$ ou bien $W'=(A-\beta I_n)W\neq 0_{n,1}$ et $(A-\alpha I_n)\,W'=0_{n,1}$ et alors $\alpha\in Sp(A)\square$
10) L'ensemble des sev de E stables par f et g dont la dimension est de la forme $2^kq, q$ impair n'étant pas vide (E convient), V existe bien. La non vacuité du spectre de $f_{/V}$ résulte de la preuve précédente$\square$
11) Notons a une valeur propre de $f_{/V}$ et $V_1=Ker(f_{/V}-aId_V)$ puis $V_2=Im(f_{/V}-aId_V)$. $g_{/V}$ la restriction de g à V est un endomorphisme de V (puisque V est stable par g, commutant avec $f_{/V}$ donc V_1 et V_2 sont stables par $g_{/V}$.
Premier cas : $f_{/V}$ est une homothétie et tout vecteur propre de $g_{/V}$ (il en existe cf 10))le sera aussi pour

$f_{/V}$.
Second cas : $f_{/V}$ n'est pas une homothétie et V_2 n'est pas réduit au vecteur nul (c'est déjà le cas) de V_1. On pose alors $\dim(V_1) = 2^i r$ et $\dim(V_2) = 2^j s$, où r et s sont des entiers.
Si i ou j sont strictement inférieurs à k, l'hypothèse de récurrence appliquée au V_l adéquat permet de dire que les restrictions à ce V_l de $f_{/V}$ et $g_{/V}$ (donc f et g) ont un vecteur propre en commun.
Sinon on devrait avoir $i \geq k$ et $j \geq k$ et, formule du rang oblige, on dispose aussi de $2^k(2^{i-k}r + 2^{j-k}s) = 2^k q$ soit $2^{i-k}r + 2^{j-k}s = q$. Ceci entraîne $r < q$ et contredit la minimalité de q. Cette possiblité est exlue$\square$
La propriété (P_k) s'en trouve héréditaire et le principe de récurrence donne sa validité pour tout $k\square$
12) Sera corrigé dans un autre contexte lundi.
13) D'après la partie précédente, f possède au moins une valeur propre donc χ_A admet au moins une racine complexe; ainsi par 12) P, polynôme général pour montrer le théorème, a-t-il aussi une telle racine$\blacksquare$

♡FIN♡