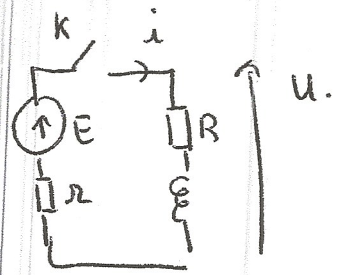
Correction Etincelle de rupture -

Partie A.

1°]



2°) Continuité du courant ds la bobine

$i(0^-) \overset{L}{=} i(0^+)$

et $i(0^-)=0$ (K ouvert).

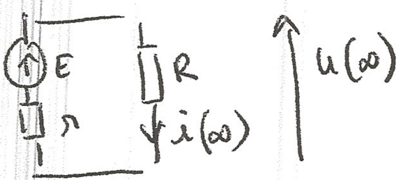
$\Rightarrow \boxed{i(0^+) = 0.}$

loi des mailles $E = ri + u$

$t=0^+$ $E = r\underbrace{i(0^+)}_{0} + u(0^+)$

$\rightarrow \boxed{u(0^+) = E}$

3°] En régime permanent continu —m— ⇔ — .



$\boxed{u(\infty) = \frac{R}{R+r} \cdot E}$ (Diviseur de tension)

$i(\infty) = \frac{u(\infty)}{R} = \boxed{\frac{E}{R+r} = i(\infty)}$

4°] $E = (r+R)\,i + L\frac{di}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{L/R+r} = \frac{E}{L}.$ à identifier à

$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} =$ Snd membre $\rightarrow \boxed{\tau = L/R+r}$

$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + Sp$ et $Sp = cte = \frac{E}{L} \times \frac{L}{R+r} = \frac{E}{R+r}.$

Rq Sp doit correspondre à $i(\infty)$!

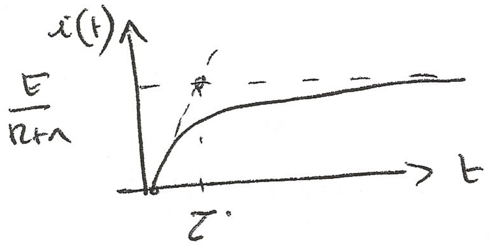
$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R+r}$ à $t=0^+$ $i(0^+) = 0 = A + \frac{E}{R+r}$

$\rightarrow \boxed{i(t) = \frac{E}{R+r}\left(1 - \exp^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

$u(t) = L\frac{di}{dt} + Ri = \frac{R.E}{R+r}\left(1 - \exp^{-\frac{t}{\tau}}\right) + L \cdot \frac{E}{R+r} \cdot \left(+\frac{R+r}{L}\right) \exp^{-\frac{t}{\tau}}$

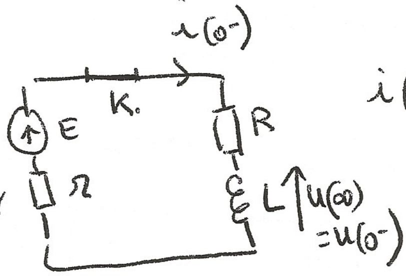
$$u(t) = \frac{R \cdot E}{R+r} + E\left(1 - \frac{R}{R+r}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\boxed{u(t) = E\left[\frac{R}{R+r} + \frac{r}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}\right].}$$



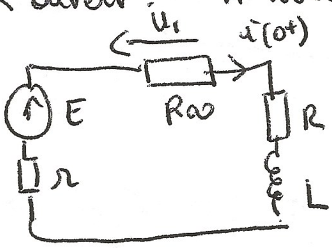
Partie B

1°) K fermé depuis longtemps
↳ régime permanent
à t = 0, on ouvre K.



$$i(0^-) = \frac{E}{r+R}.$$

K ouvert : K modélisé par une résistance très grande noté R_∞.

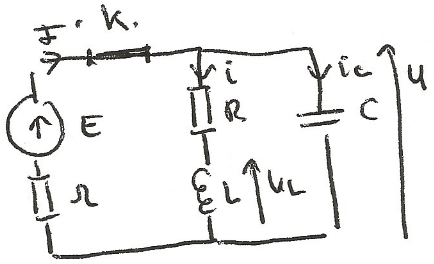


u_1 (Tension aux bornes de K).

$$u_1 = R_\infty \cdot i(0^+) = R_\infty \cdot i(0^-) = \boxed{\frac{R_\infty \cdot E}{R+r} = u_1} \to \infty.$$

l'air devient conducteur.

2°)



$$\begin{cases} E = rI + u. \ (1) \\ I = i + i_C \ (2) \\ u = Ri + L\dfrac{di}{dt}. \ (3) \\ i_C = C\dfrac{du}{dt}. \ (4). \end{cases}$$

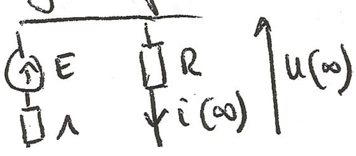
équations du circuit.

3°) $\boxed{\begin{array}{l} i(0^+) = i(0^-) = 0 \\ u(0^+) = u(0^-) = 0 \end{array}}$. Continuité du courant ds la bobine. Continuité de la tension aux bornes de C.

l'équation (3) donne. $\underbrace{u(0^+)}_{=0} = R\underbrace{i(0^+)}_{=0} + L\frac{di}{dt}(0^+) \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = 0}.$

4°) En régime permanent $i_C(\infty) = 0$ et $u_L(\infty) = 0$.

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \boxed{u(\infty) = \frac{R}{R+r}E}. \quad i(\infty) = \frac{E}{R+r}.$$

5°] (1) + (2) donnent :

$$E = r(i+i_C) + u = ri + ri_C + u = ri + rC\frac{du}{dt} + Ri + L\frac{di}{dt}.$$

(4)

En dérivant (3), on obtient :

$$E = (r+R)i + rC\left[R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2}\right] + L\frac{di}{dt}.$$

$$rLC\frac{d^2i}{dt^2} + (rRC + L)\frac{di}{dt} + (r+R)i = E$$

$$\boxed{LC\frac{d^2i}{dt^2} + \left(RC + \frac{L}{r}\right)\frac{di}{dt} + \frac{r+R}{r}\,i = \frac{E}{r}.}$$

Sous cette forme, on vérifie facilement que tous les termes sont homogènes à un courant.

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\left(RC + \frac{L}{r}\right)}{LC}\frac{di}{dt} + \frac{\frac{r+R}{r}}{LC}\,i = \frac{E}{rLC}.$$

On pose $\begin{cases} 2\lambda\omega_0 = \dfrac{RC + \frac{L}{r}}{LC} \\ \omega_0^2 = \dfrac{\frac{R+r}{r}}{LC}. \end{cases}$ et on vérifie que

$$S_p = \frac{\frac{E}{rLC}}{\frac{R+r}{\cancel{r}}/\cancel{LC}} = \frac{E}{R+r}$$

ce qui correspond bien à $i(\infty)$ déterminé à la question 4

Résolution : $\dfrac{d^2i}{dt^2} + 2\lambda\omega_0\dfrac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \dfrac{E}{rLC}$ $\quad S_p = \dfrac{E}{r\omega_0^2 rL} = \dfrac{E}{R+r}$

S_{G_0} : e^{r} solution $r^2 + 2\lambda\omega_0 r + \omega_0^2 = 0.$

$\Delta = 4\lambda^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\lambda^2-1) < 0$ pour le régime pseudo périodique ; et $r = -\lambda\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$.

On déduit $i(t) = Ae^{-\lambda\omega_0 t}\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\,t + \varphi\right) + \dfrac{E}{R+r}$

à $t = 0^+$; $i(0^+) = 0$ $\qquad A\cos\varphi + \dfrac{E}{R+r} = 0.$

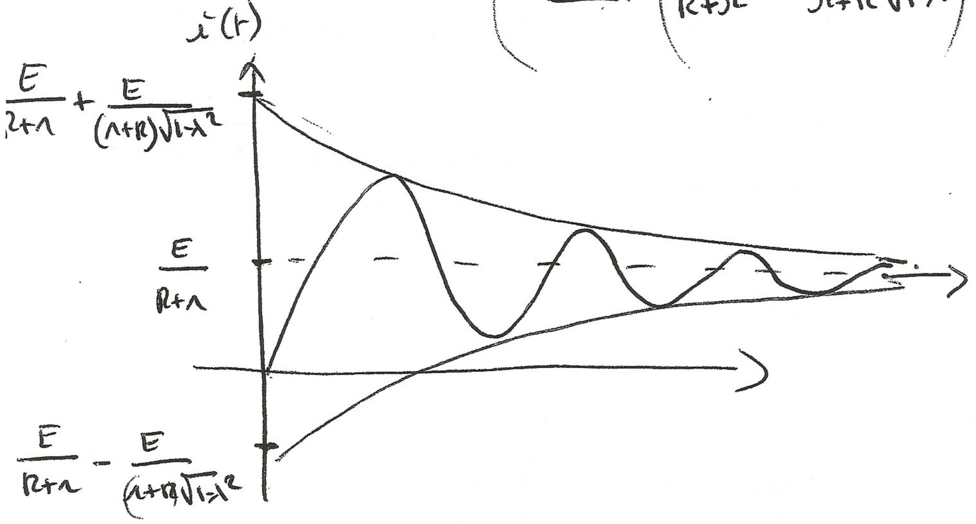
$\dfrac{di}{dt}(0^+) = 0 \qquad -\lambda\omega_0\cos\varphi - \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\sin\varphi = 0 \rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda}}$

et $A = -\frac{E}{(R+r)\cos\varphi}$ avec $\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \mathrm{tg}^2\varphi = 1 + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} = \frac{1}{1-\lambda^2} \rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \sqrt{1-\lambda^2}, \\ \varphi = -\arctan\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \end{cases}$

Finalement $\boxed{i(t) = \frac{E}{R+r}\left(1 - \frac{e^{-\lambda\omega_0 t}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\,t + \varphi\right)\right)}$

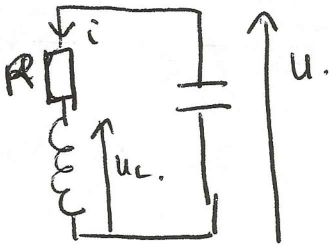
$i(t)$ compris entre $\frac{E}{R+r}\left(1 - \frac{e^{-\lambda\omega_0 t}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right)$ et $\frac{E}{R+r}\left(1 + \frac{e^{-\lambda\omega_0 t}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right)$

$t=0$. $\left(\frac{E}{R+r} - \frac{E}{r+R\sqrt{1-\lambda^2}}\right) < 0$ $\qquad \frac{E}{R+r} + \frac{E}{r+R\sqrt{1-\lambda^2}}$



7°] K ouvert à $t=0$ (Nouvelle origine des temps)
↳ $t=0^-$ → correspond au régime permanent de la question 6)

a]



$\boxed{i(0^-) = \frac{E}{R+r} = i(0^+)}$ Continuité du courant ds une bobine.

$\boxed{u(0^-) = \frac{R}{R+r}E = u(0^+)}$ Continuité de la tension aux bornes de C.

et $u = Ri + L\frac{di}{dt}$ $\forall t$.

$u(0^+) = Ri(0^+) + L\frac{di}{dt}(0^+) \rightarrow \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{u(0^+) - Ri(0^+)}{L} = 0.$

$\boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = 0.}$

quand $t \to \infty$ $i \to 0$ car le condensateur agit comme un interrupteur ouvert. Le courant ds la bobine s'annule pdt le régime transitoire et peut rester continu $\Rightarrow$ l'étincelle est évitée.

b] l'équation différentielle vérifiée par i s'obtient en écrivant la loi des mailles :

$$\begin{cases} u = Ri + L\dfrac{di}{dt} \quad \text{et} \quad i = -C\dfrac{du}{dt}. \\ \Downarrow \text{ on dérive} \\ \dfrac{du}{dt} = R\dfrac{di}{dt} + L\dfrac{d^2i}{dt^2} \rightarrow -\dfrac{i}{C} = R\dfrac{di}{dt} + L\dfrac{d^2i}{dt^2}. \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0.} \qquad \begin{cases} 2\lambda\omega_0 = \dfrac{R}{L} \\ \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}. \end{cases}$$

On suppose le régime transitoire critique $\Rightarrow \lambda = 1$

$$i(t) = (A+Bt)\,e^{-\omega_0 t}. \qquad \text{et} \begin{cases} i(0^+) = \dfrac{E}{R+r} \\ \dfrac{di}{dt}(0^+) = 0. \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\frac{di}{dt} = +Be^{-\omega_0 t} - \omega_0(A+Bt)e^{-\omega_0 t}.$$

d'où $i(0^+) = \dfrac{E}{R+r} \rightarrow A = \dfrac{E}{R+r}.$

$\dfrac{di}{dt}(0^+) = 0 \rightarrow +B - \omega_0 A = 0 \rightarrow B = \omega_0 \cdot \dfrac{E}{R+r}.$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R+r}(1+\omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t}.}$$