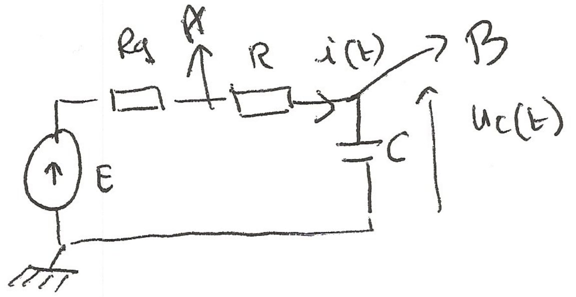
Correction TD. Circuits du 1° ordre en régime transitoire.



1°] à $t=0^-$ $u_c=0$ $\Rightarrow$ $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$.

à $t\to\infty$ $i\to 0$ $\Rightarrow$ $E = (R_g+R)\underbrace{i(\infty)}_{=0} + u_c(\infty)$

$\Rightarrow$ $u_c(\infty) = E$.

équation différentielle : $\begin{cases} E = (R+R_g)\, i(t) + u_c(t) \\ i(t) = C \dfrac{du_c}{dt} \end{cases}$.

d'où $E = (R+R_g)C\dfrac{du_c}{dt} + u_c$ $\Rightarrow$ $\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{u_c}{(R+R_g)C} = \dfrac{E}{(R+R_g)C}$.

On pose :
$\tau = (R+R_g)C$ $\qquad S_{GO}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

et Détermination de la S_p :

$\dfrac{dS_p}{dt} + \dfrac{S_p}{(R+R_g)C} = \dfrac{E}{(R+R_g)C}$ $\Rightarrow$ $S_p = E$ Rq On retrouve bien : $S_p = u_c(\infty) = E$.

$\begin{cases} u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E \\ \text{à } t=0^+ \quad u_c = 0 \rightarrow A = -E \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{u_c(t) = E\left(1 - \exp^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

2°] $u_c(t_1) = 0{,}9\cdot E$ $\Rightarrow$ $E - E\exp^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0{,}9E$ $\rightarrow$ $0{,}1 = \exp^{-\frac{t_1}{\tau}}$.

$t_1 = -\tau \ln(0{,}1) = \boxed{\tau \ln 10 = t_1}$

3°] en voie B, on visualise u_c

en voie A, on visualise $u_A = E - R_g \cdot i(t) = E - R_g\cdot C\dfrac{du_c}{dt} =$

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{-E}{(R+R_g)C}\, e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

d'où $u_A(t) = E\left(1 - \frac{R_g}{R+R_g}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \boxed{u_A(0^+) = \frac{R}{R+R_g}\cdot E} \neq 0.$

4°) Courbe (2) $\rightarrow u_A$.

Courbe (1) $\rightarrow u_C(t)$.

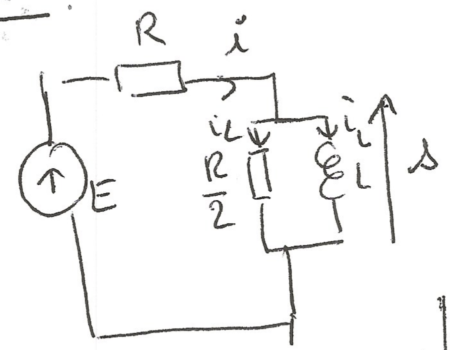
$-\begin{cases} u_A(0^+) = 4V \\ t_1 = 0{,}42ms \end{cases}$ et $R_g = R\left[\frac{E}{u_A(0^+)} - 1\right] = 100\left(\frac{6}{4} - 1\right) = \boxed{50\,\Omega}$

$t_1 = (R+R_g)C \ln 10 \Rightarrow C = \frac{t_1}{(R+R_g)\ln 10} = 1{,}2\,\mu F$.

Pour visualiser le signal creneau, il faut : $\frac{T}{2} > \tau$

$\frac{1}{2f} > \tau \Rightarrow f < \frac{1}{2\tau} = 2{,}7\,kHz$ -

ex 2.



Equations du circuit : (K fermé)

$$\begin{cases} E = Ri + s & (1) \\ s = \frac{R}{2} i_2 = L\frac{di_L}{dt} & (2) \\ i_L + i_2 = i & (3) \end{cases}$$

CI

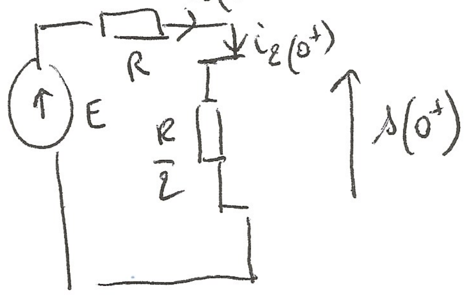
à $t = 0^-$ $i_L(0^-) = 0$ et $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

continuité du courant traversant la bobine.

$\left.\begin{array}{l} i(0^-) = 0 \\ i_2(0^-) = 0 \end{array}\right\}$ K ouvert.

d'où $s(0^-) = 0$ car $s = \frac{R}{2} i_L$.

à $t = 0^+$, le circuit équivaut à :



$i(0^+) = i_2(0^+) = \frac{E}{R + \frac{R}{2}}$

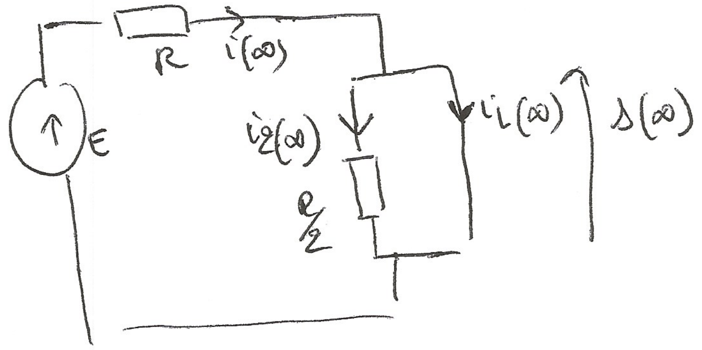
$$\boxed{i(0^+) = \frac{2E}{3R}}$$

et $s(0^+) = \frac{R/2}{R + R/2}\cdot E = \frac{E}{3}$

2] Regime permanent continu $(t \to \infty)$.

Bobine = fil

Circuit equivalent à $t \to \infty$



$s(\infty) = 0$ (Tension aux bornes d'un fil)

$s(\infty) = \frac{R}{2} \cdot i_2(\infty) \Rightarrow i_2(\infty) = 0$

d'où $\boxed{i(\infty) = i_L(\infty) = \frac{E}{R}.}$

3] Equation differentielle vérifiée par $s(t)$

(1) $\rightarrow$ $E = R(i_L + i_2) + s$

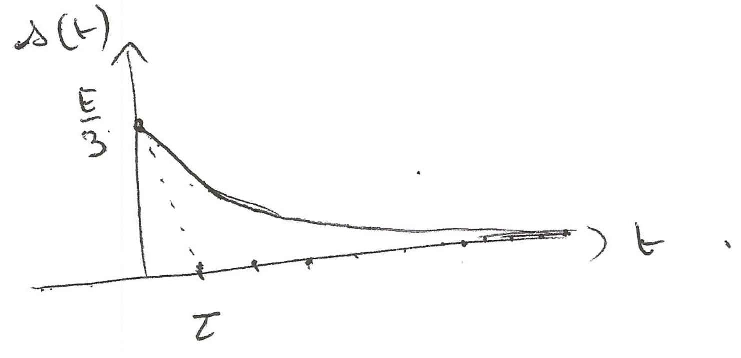
+ (3)

$E = R i_L + 2s + s.$

On derive $0 = R\frac{di_L}{dt} + 3\frac{ds}{dt} \underset{(2)}{\Rightarrow} s \cdot \frac{R}{L} + 3\frac{ds}{dt} = 0.$

d'où $\boxed{\frac{ds}{dt} + \frac{R}{3L} s = 0}$ $\rightarrow$ $\tau = \frac{3L}{R}$ et $s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

à $t=0^+$ $s = \frac{E}{3}$ $\rightarrow$ $s(t) = \frac{E}{3} e^{-\frac{t}{\tau}}$.



equation differentielle vérifiée par $i(t)$: $s = E - Ri$ d'après 1.

à remplacer ds $\frac{ds}{dt} + \frac{R}{3L} s = 0$

d'où $\frac{d}{dt}(E-Ri) + \frac{R}{3L}(E-Ri) = 0.$

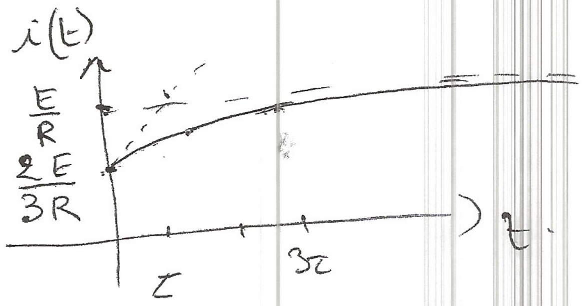
$-R\frac{di}{dt} + \frac{R}{3L}\cdot E - \frac{R^2 i}{3L} = 0$ → En simplifiant par R

$\frac{di}{dt} + \frac{R}{3L} i = \frac{E}{3L}$ → $\tau = \frac{3L}{R}$ $\quad i(\infty) = \frac{E}{R}$

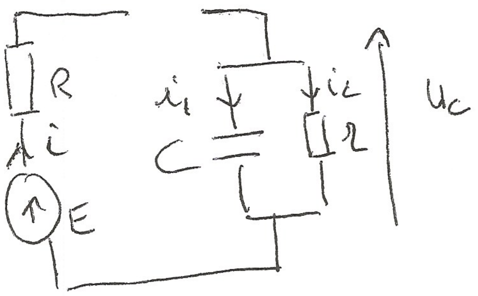
$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$ et à $t=0^+$ $\quad i(0^+) = \frac{2E}{3R}.$

$\frac{2E}{3R} = A + \frac{E}{R}$ → $A = \frac{2E}{3R} - \frac{E}{R} = -\frac{E}{3R}.$

$$\boxed{i(t) = -\frac{E}{3R}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}}$$



Ex 3



équations du circuit :

$E = Ri + U_c$ (1)

$i_1 = C\frac{dU_c}{dt}$ (2)

$U_c = r i_2$ (3)

$i = i_1 + i_2$ (4)

CI à $t=0^+$ C déchargé ⇒ $U_c(0^-) = 0$

Par continuité de U_c aux bornes de C ⇒ $\boxed{U_c(0^+)}$

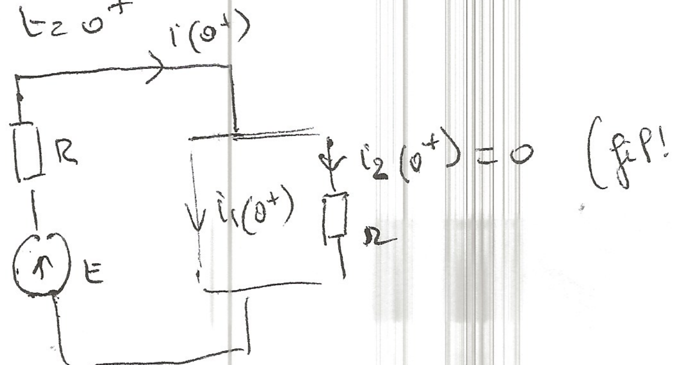
équation (1) ⇒ $\boxed{i(0^+) = \frac{E}{R}}$

Valeur de $i_1(0^+)$ et $i_2(0^+)$

$U_c(0^+) = 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} i_2(0^+) = 0$

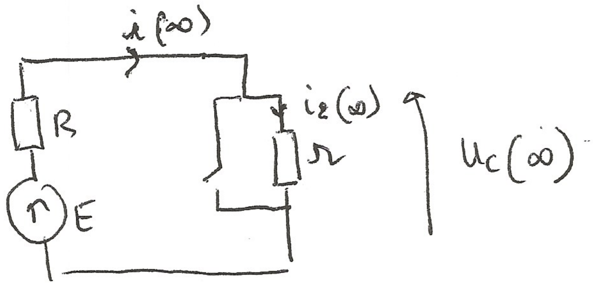
(4) ⇔ $i_1(0^+) = i(0^+) = \frac{E}{R}$

Valeurs retrouvées avec le circuit équivalent à $t=0^+$



2] Régime permanent continu ($t \to \infty$).

$-||- \iff -/- \implies i_1(\infty) = 0.$



$$\boxed{u_c(\infty) = \frac{r}{r+R} \cdot E}$$ (diviseur de tension)

$$\boxed{i(\infty) = i_2(\infty) = \frac{E}{r+R}}$$

Valeurs que l'on peut retrouver avec les équations 1, 2, 3, 4.

$$i_1(\infty) = 0 \overset{(4)}{\implies} i(\infty) = i_2(\infty) \overset{(3)}{\implies} i(\infty) = i_2(\infty) = \frac{u_c(\infty)}{r}.$$

d'où avec (1) $E = (r + R)\, i(\infty)$.

3) Équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$.

$$(1) \implies E = Ri + u_c \overset{(2)}{=} R(i_1 + i_2) + u_c \overset{(2)+(3)}{=} R\left(C\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{r}\right) + u_c.$$

d'où $RC\dfrac{du_c}{dt} + \left(\dfrac{R}{r} + 1\right)u_c = E$.

$$\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{R+r}{R \cdot r \cdot C}\, u_c = \frac{E}{RC}.}$$

On pose $\tau = \dfrac{R \cdot r \cdot C}{R+r}$

et $S_p = \dfrac{E/RC}{(R+r)/R.r.C} = \dfrac{r}{R+r} \cdot E = u_c(\infty)$ (On retrouve le résultat de la question 2)

d'où $u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{rE}{R+r}$.

à $t = 0^+$ $\quad 0 = A + \dfrac{rE}{r+R} \implies \boxed{u_c(t) = \dfrac{r \cdot E}{R+r}\left(1 - \exp^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

4] Équation différentielle vérifiée par $i(t)$:

On peut utiliser la même méthode que ds l'ex 2 ou alors :

On dérive (1) $\Rightarrow$ $\frac{R\,di}{dt} + \frac{du_c}{dt} = 0.$

(2) $\Rightarrow$ $\frac{R\,di}{dt} + \frac{i_1}{C} = 0$

(4) $\Rightarrow$ $\frac{R\,di}{dt} + \frac{i - i_2}{C} = 0.$

(3) $\Rightarrow$ $\frac{R\,di}{dt} + \frac{i}{C} - \frac{u_c}{rC} = 0.$

(1) $\Rightarrow$ $\frac{R\,di}{dt} + \frac{i}{C} - \frac{(E - Ri)}{rC} = 0.$

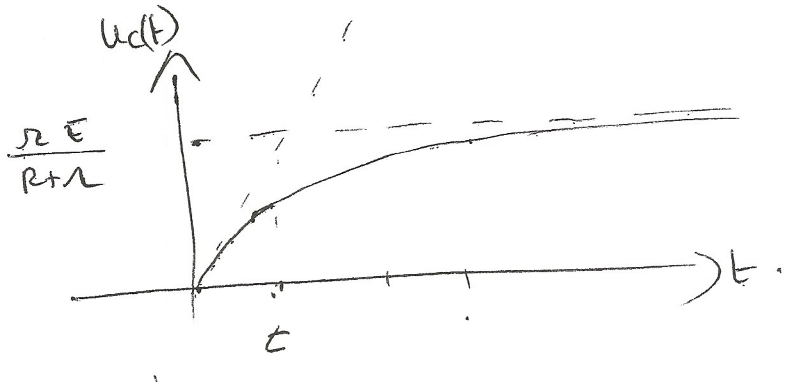
et on obtient : $\frac{di}{dt} + \frac{r+R}{rRC} \cdot i = \frac{E}{R \cdot r \cdot C}$ d'où $\tau = \frac{rR}{r+R} \cdot C$

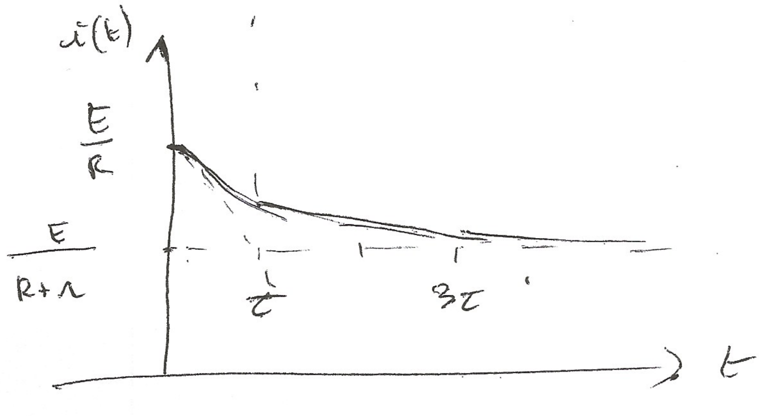
et $S_p = \frac{E}{r+R}$

$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{r+R}.$

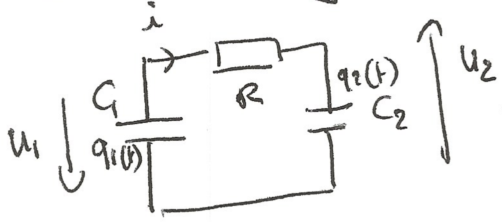
$i(t=0^+)$ $\frac{E}{R} = A + \frac{E}{r+R}$ $\rightarrow$ $A = \frac{E}{R} - \frac{E}{r+R} = \frac{r \cdot E}{R(r+R)}$

$$\boxed{i(t) = \frac{r}{R(r+R)} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{r+R}.}$$





Ex 4 Décharge d'un condensateur :



$$\begin{cases} i(t) = C_1 \dfrac{du_1}{dt} = C_2 \dfrac{du_2}{dt} \\ u_1 + Ri + u_2 = 0 \end{cases}$$

à $t = 0^-$ $\quad q_1(0^-) = q_0 \longrightarrow q_1(0^+) = q_0$ par
$q_2(0^-) = 0 \longrightarrow q_2(0^+) = 0$ continuité de la charge.

$$i = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1(t) = q_2(t) + cste \\ \text{à } t=0^+ \; q_0 = 0 + cste \end{array}\right\} \rightarrow q_1(t) = q_2(t) + q_0$$

donc $\boxed{q_1(\infty) = q_2(\infty) + q_0.}$ (1)

De plus à $t \to \infty$ $\quad i(\infty) = 0$; donc la loi des mailles donne
$u_1 + u_R + u_2 = 0$ avec $u_R = 0$ et $u_1 = \dfrac{q_1(\infty)}{C_1}$ et $\dfrac{q_2(\infty)}{C_2} = u_2$.

d'où $\boxed{\dfrac{q_1(\infty)}{C_1} + \dfrac{q_2(\infty)}{C_2} = 0}$ (2)

donc $q_1(\infty) = -\dfrac{C_2}{C_1} q_1(\infty) + q_0 \Rightarrow q_1(\infty)\left[1 + \dfrac{C_2}{C_1}\right] = q_0.$

$$\boxed{q_1(\infty) = \frac{C_1 \cdot q_0}{C_1 + C_2}} \qquad \boxed{q_2(\infty) = -\frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot q_0.}$$

2°) La loi des mailles à $t = 0^+$ donne $u_1(0^+) + Ri(0^+) + u_2(0^+) = 0.$

$$\frac{q_1(0^+)}{C_1} + Ri(0^+) + \frac{q_2(0^+)}{C_2} = 0$$

d'où $\boxed{i(0^+) = -\dfrac{q_0}{RC_1}}$

3°) On dérive la loi des mailles $\dfrac{du_1}{dt} + R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{du_2}{dt} = 0.$

$$\frac{i}{C_1} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C_2} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{R}\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right] i = 0.$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{C_1 + C_2}{RC_1C_2}\, i = 0 \Rightarrow \text{On pose } \tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2} \text{ et } i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

à $t = 0^+$ $\quad i(0^+) = -\dfrac{q_0}{RC_1} \Rightarrow \boxed{i(t) = -\dfrac{q_0}{RC_1} e^{-\frac{t}{\tau}}.}$

4°] $\mathcal{E}_1(0^+) = \dfrac{q_0^2}{2C_1}$ $\qquad \mathcal{E}_2(0^+) = 0$

$$\mathcal{E}_1(\infty) = \left(\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)^2 \cdot \frac{q_0^2}{2C_1} \qquad \mathcal{E}_2(\infty) = \left(\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)^2 \cdot \frac{q_0^2}{2C_2} = \frac{C_2}{2(C_1+C_2)^2} \cdot q_0^2.$$

$$= \frac{C_1}{2(C_1+C_2)^2} q_0^2$$

d'où $\Delta\mathcal{E}_c = \left[\mathcal{E}_1(\infty) - \mathcal{E}_1(0)\right] + \left[\mathcal{E}_2(\infty) - \mathcal{E}_2(0^+)\right].$

$$= \frac{C_1 q_0^2}{2(C_1+C_2)^2} - \frac{q_0^2}{2C_1} + \frac{q_0^2 \cdot C_2}{2(C_1+C_2)^2} = \frac{q_0^2 (C_1+C_2)}{2(C_1+C_2)^2} - \frac{q_0^2}{2C_1}$$

$$= \frac{q_0^2}{2(C_1+C_2)} - \frac{q_0^2}{2C_1} = \frac{q_0^2}{2}\left[\frac{1}{C_1+C_2} - \frac{1}{C_1}\right] = -\frac{q_0^2 \cdot C_2}{2C_1(C_1+C_2)} < 0.$$

L'énergie perdue est dissipée par effet Joule ds la résistance.

On le vérifie directement en calculant.

$$\mathcal{E}_R(t\to\infty) - \mathcal{E}_R(0) = \int_0^\infty R i^2(t)\, dt = \int_0^\infty R \cdot \frac{q_0^2}{R^2 C_1^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt.$$

$$= \frac{q_0^2}{R C_1^2} \cdot \left(-\frac{\tau}{2}\right) \underbrace{\left[e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^\infty}_{-1} = -\frac{q_0^2}{2\cancel{R} C_1^2} \cdot \frac{\cancel{R} C_1 C_2}{C_1+C_2} = +\frac{q_0^2 C_2}{2C_1(C_1+C_2)}.$$