TD/Cours : Réduction effective et Applications

1 Pratique de la réduction

1.1 Généralités

Notations 1 *On note $D_n(\mathbb{K})$($n \geq 1$)le sev de $M_n(\mathbb{K})$, constitué des matrices diagonales.*
Si $M \in M_n(\mathbb{K})$, f_M symbolise son endomorphisme canoniquement associé.
E représente un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

1.2 Diagonaliser une matrice, un endomorphisme

Définition 1 *Diagonaliser A de $M_n(\mathbb{K})$, c'est :*
i) Constater que A est bien diagonalisable.
ii) Expliciter D de $D_n(\mathbb{K})$ et P de $GL_n(\mathbb{K})$ telles que : $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

Remarque 1 *Pour s'assurer de i) on détermine, en général, le polynôme caractéristique de A et on précise son spectre et on obtient la diagonalisabilité de A avec la caractérisation algébrique.*
Le polynôme caractéristique étant un invariant de similitude, la diagonale de D (en supposant i) réalisé) est constituée des valeurs propres de A, chacune apparaissant son ordre de multplicité fois.
Par ailleurs, formule de changement de base oblige, P est nécessairement une matrice de passage.

Notations 2 *A est supposée diagonalisable et $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$ (ces valeurs propres sont 2 à 2 distinctes). Enfin m_i est la mutiplicité de λ_i ($i \in [\![1, n]\!]$).*

Précisons, dans ce contexte, comment déterminer D et P pour satisfaire la condition ii).

Technique 1 *a) On pose $D = diag(\overbrace{\lambda_1, ...\lambda_1}^{m_1 fois}, ..., \overbrace{\lambda_s, ...\lambda_s}^{m_s fois})$.*
b) Pour chaque λ_i ($i \in [\![1, s]\!]$) on détermine une base b_i de l'espace propre associé $E_{\lambda_i}(f_A)$ (en résolvant, par exemple, le système $AX = \lambda_i X$.
Dès lors en notant $b = (b_1, ..., b_s)$ (qui est une base de $\mathbb{K}^n$, constituée de $\overrightarrow{vp}$ de f_A et dite de diagonalisation de f_A), il suffit de prendre P comme étant la matrice de passage de e à b (Changement de base donne $D = P^{-1}AP$) pour obtenir $\boxed{A = PDP^{-1}}$

Remarque 2 *On peut avec l'expérience ne pas utiliser explicitement f_A, P est alors une matrice dont les colonnes sont les colonnes propres associées à b.*

Pour les endomorphismes nous avons :

Définition 2 *Diagonaliser $f \in L(E)$ revient à diagonaliser toute matrice le représentant ou à en chercher une base de diagonalisation.*

1.3 Trigonaliser une matrice, un endomorphisme

Notations 3 *On note $T_n^+(\mathbb{K})$ le sev de $M_n(\mathbb{K})$, constitué des matrices triangulaires supérieures.*

Définition 3 *Trigonaliser A de $M_n(\mathbb{K})$, c'est :*
i) Constater que A est bien trigonalisable (i.e que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$))
ii) Expliciter T de $T_n^+(\mathbb{K})$ et P de $GL_n(\mathbb{K})$ telles que : $\boxed{A = PTP^{-1}}$.

Remarque 3 *Le polynôme caractéristique étant un invariant de similitude, la diagonale de T (en supposant ii) réalisé) est constituée des valeurs propres de A, chacune apparaissant son ordre de multplicité fois.*
Par ailleurs, formule de changement de base oblige, P est nécessairement une matrice de passage.
Pour l'obtention de P et de T vous serez en général guidé. Voir dernier paragraphe.

Terminologie 1 *Réduire c'est diagonaliser ou trigonaliser.*

1.4 Un exemple

A faire 1 *Réduire la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2 Applications de la réduction

On essaie d'alterner le théorique du calculatoire et on ne prétend pas à l'exhaustion.

2.1 Mieux comprendre la nilpotence

Travailler sur la proposition suivante.

Proposition 1 *(A démontrer)*
i) Le spectre d'un endomorphisme nilpotent ou d'une matrice nilpotente est $\{0\}$.
ii) Un endomorphisme (resp. une matrice) nilpotent(e) non nul n'est pas diagonalisable.
iii) Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent ou d'une matrice nilpotente est X^n (en particulier trace et déterminant de tels objets sont nuls).
iv) Un endomorphisme nilpotent (une matrice nilpotente) est trigonalisable.

Preuve 1 *i) cf cours et/ou DS2.*
ii) En effet une matrice diagonalisable de spectre réduit à un élément est nécéssairement scalaire.
iii) On le démontre pour une matrice A que l'on peut supposer à termes complexes, ce qui permet de dire que χ_A est scindé. Comme il est unitaire, de degré n et que sa seule racine est 0, on a bien $\chi_A = X^n$.
iv) Le point précédent prouve que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent est scindé donc que ce dernier est trigonalisable.

Il en résulte que (ii) + Cayley-Hamilton, la traduction pour les endomorphismes allant de soi) :
L'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de taille n est $\leq n$.

2.2 Calcul de puissances d'une matrice

En partant du principe qu'élever à une puissance arbitraire une matrice diagonale et à un degré moindre une matrice triangulaire reste avantageux en terme de nombre de calculs, une matrice A réduite par l'égalité $A = PUP^{-1}$, où U est diagonale, voire triangulaire se prête bien mieux aux manipulations algébriques puisque $A^n = PU^nP^{-1}$, ce pour tout n.

A faire 2 *Calculer les puissances successives de* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On devrait trouver : $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}(-1)^{n+1} + \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Attention cette formule ne convient pas si $n = 0$, pourquoi?
(Parce que une valeur propre est nulle et que $0^0 = 1 \neq 0$; il s'ensuit une particularité pour $n = 0$ que cette formule ne prend pas en compte)

A faire 3 *(Le problème des animaux de Jean-Marie Souriau, physicien : Genèse revisitée et insulaire)*
A l'aube du premier jour sur une île vivent trois espèces : des ours, des mangoustes et des serpents.Les règles de prédation sont les suivantes : au matin de chaque jour toute mangouste mange un serpent, vers midi chaque serpent pique mortellement un ours et au crépuscule chaque ours dévore une mangouste.Il est à noter que les causes de mortalité pour chaque espèce se réduisent aux précédentes et que chaque animal a fait voeu de chasteté. Dans ces (inhumaines) conditions au matin du dixième jour une mangouste se réveille seule et triste. Quels étaient les effectifs initiaux de chaque espèce ?

Solution : 1 *Pour $1 \leq n \leq 10$,on pose m_n comme étant le nombre de mangoustes à l'aube du n-ième jour et on définit de façon analogue o_n et s_n et on note* $X_n = \begin{pmatrix} m_n \\ o_n \\ s_n \end{pmatrix}$.

On a donc $X_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et (en traduisant les règles de prédation), pour tout $n \in [\![1, 9]\!]$, $X_{n+1} = MX_n$, où* $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est inversible d'inverse $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La réponse théorique est donc la première colonne de A^9.
La détermination des valeurs propres de A ne conduisant à rien d'exploitable.
On se contente donc de calculer A^9. Ce qui donne :

$$A^9 = \begin{pmatrix} 351 & 616 & 465 \\ 465 & 816 & 616 \\ 616 & 1081 & 816 \end{pmatrix}$$

2.3 Calcul d'un déterminant circulant

A faire 4 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ *et* $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ i^k \\ i^{2k} \\ i^{3k} \end{pmatrix}$, $0 \leq k \leq 3$.

a) Vérifier que les X_k sont colonnes propres de A puis que A est diagonalisable.
b) En déduire le déterminant de A.

Solution : 2 *a) On a $AX_0 = 10X_0$ puis $AX_2 = -2X_2$ et $AX_1 = (-2 - 2i)X_1$, $AX_3 = (-2 + 2i)X_3$. On dispose de 4 valeurs propres distinctes pour A, d'ordre 4; A est diagonalisable et $Sp(A) = \{-2, 10, -2 - 2i, -2 + 2i\}$.(On remarquera la cohérence avec la trace).*
b) En considérant A comme matrice à coefficients complexes, $\det(A)$ *est le produit des valeurs propres donc* $\det(A) = -160$ ■

2.4 Similitude de matrices

Un moyen de montrer que deux matrices sont semblables consiste à prouver qu'elles sont semblables à une même matrice (diagonale ici).

A faire 5 *Vérifier que* $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *sont semblables.*

2.5 Recherche de sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme

A PROUVER !

Proposition 2 *Soient* $f \in L(E)$ *et* $F \neq \{0_E\}$ *sev de* E *stable par* f*.*
On note g *l'endomorphisme de* F *induit par* f*.*
i) f *diagonalisable* $\Longrightarrow$ g *diagonalisable.*
ii) f *trigonalisable* $\Longrightarrow$ g *trigonalisable.*

On rappelle que les droites vectorielles stables par un endomorphisme sont celles qui sont engendrées par un vecteur propre de cet endomorphisme. Il est donc légitime de penser que la réduction peut s'avérer utile dans la recherche des sous-espaces propres d'un endomorphisme.

A faire 6 *En raisonnant sur la dimension de tels sous-espaces les déterminer pour l'endomorphisme canoniquement associé à* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*. On accordera un soin particulier aux plans.*

2.6 Commutant

A faire 7 *On se donne* $A \in M_n(\mathbb{K})$*, possédant* n *valeurs propres.*
On note $C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$*, dit commutant de* A*.*
i) Prouver que $C(A)$ *est un sev de* $M_n(\mathbb{K})$*. ii) Etablir que si* A *est en plus diagonale,* $C(A) = D_n(\mathbb{K})$*.*
On revient au cas général et on pose $A = PDP^{-1}$*, où* D *est diagonale.*
iii) Montrer que $\theta : X \in C(A) \to P^{-1}XP \in C(D)$ *est un isomorphisme.*
iv) En déduire $\dim(C(A))$*.*
v) En déduire que $C(A) = Vect(I_n, A, ..., A^{n-1})$*.*

Solution : 3 *i) Vérification directe.*
ii) On prend $A = diag(d_1, ..., d_n)$ *avec les* d_i *des éléments de* $\mathbb{K}$ *deux à deux différentes.*
Prenant $M = (m_{i,j})$*, l'égalité* $AM = MA$ *équivaut à* $(d_i - d_j)m_{i,j} = 0$ *pour tout* $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$*.*
Ainsi on a bien $AM = MA \Longleftrightarrow M \in D_n(\mathbb{K})$*.*
iii) On vérifie aisément que $X \in C(A) \Longleftrightarrow P^{-1}XP \in C(D)$ *puis que* θ *est une application linéaire injective (donc bijective avec l'équivalence du début de réponse).*
iv) ii) + iii) donne $\dim(C(A)) = \dim(C(D)) = \dim(D_n(\mathbb{K})) = n$*.*
v) Tout polynôme en A *commute avec* A *donc* $Vect(I_n, A, ..., A^{n-1}) \subset C(A)$*.*
Si $\dim(Vect(I_n, A, ..., A^{n-1})) = n$*, on a bien égalité.*
Sinon il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$*, non nul tel que* $P(A) = 0$*, ce qui implique que* $Sp(A) \leq n - 1$*. Absurde*■

3 Retour sur la trigonalisation

3.1 Preuve du théorème fondamental

On caractérise les matrices et les endomorphismes trigonalisables par :

Théorème 1 *i)* $\boxed{A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ est trigonalisable ssi } \chi_A \text{ est scindé sur } \mathbb{K}.}$
ii) $\boxed{f \in L(E), \text{ est trigonalisable ssi } \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K}.}$

En voici la démonstration dans sa partie substantielle et pour les matrices; cela suffit puisque par définition le caractère trigonalisable est un invariant de similitude et ainsi un endomorphisme est trigonalisable ssi toute (ou une) matrice le représentant l'est elle-même.

Preuve 2 *Nous allons raisonner par récurrence sur la taille de la matrice.*
On émet l'hypothèse de récurrence (H_p) *: toute matrice, d'ordre* $\leq p$ *et à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *dont le polynôme caractéristique est scindé sur ce corps, est trigonalisable. L'initialisation étant tautologique, on suppose* (H_{n-1}) *établie et on note* g *l'endomorphisme canoniquement associé à* A *dont le le polynôme caractéristique est scindé sur* $\mathbb{K}$*. Cette propriété nous assure l'existence d'au moins une valeur propre dans* $\mathbb{K}$*, nous la nommerons* μ*. Il s'ensuit que* $F = E_\mu(f)$ *est un sev de* $\mathbb{K}^n$*, stable par* f *de dimension* $s \geq 1$*.*
Premier cas : $s = n$, alors $F = \mathbb{K}^n$ et f est l'homothétie de rapport μ donc A est une matrice scalaire donc trigonalisable.
Deuxième cas : $1 \leq s \leq n-1$ et dans $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, base de E adaptée à F alors $M_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} \mu I_s & C \\ (0) & M \end{pmatrix}$, $M \in M_{n-s}(\mathbb{K})$*. On peut donc appliquer notre hypothèse de récurrence à M et trouver $Q \in GL_{n-s}(\mathbb{K})$ et $T \in T^+_{n-s}(\mathbb{K})$ telles que $T = Q^{-1}MQ$. On pose alors* $P = \begin{pmatrix} I_s & (0) \\ (0) & Q \end{pmatrix}$*, cette matrice appartient à $GL_n(\mathbb{K})$ et* $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_s & (0) \\ (0) & Q^{-1} \end{pmatrix}$ *et un produit par blocs donne* $P^{-1}M_\mathcal{B}(f)P = \begin{pmatrix} \mu I_s & CQ \\ (0) & T \end{pmatrix} \in T^+_n(\mathbb{K})$*. Ainsi A, semblable à $M_\mathcal{B}(f)$, est aussi semblable à cette matrice triangulaire et la récurrence se poursuit.*

3.2 Une trigonalisation effective simple

A faire 8 *Trigonaliser* $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
On procédera comme suit :
a) Déterminer χ_A en déduire que A est tz mais pas dz.
b) Proposer la forme la plus simple d'une matrice triangulaire de taille 2 à laquelle A puisse être semblable.
c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle f_A est représenté par la matrice intuitée en b).
d) Trigonaliser A.