TD 11 : Intégration sur un segment et révision séries

Exercice 1 : (CCINP PSI)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)dt$.

1) Calculer I_0, I_1 et I_2.

2) Etablir que la suite (I_n) est décroissante puis qu'elle est convergente. On n'en cherchera pas la limite.

3) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$.

4) En utilisant 2) et 3), déterminer un encadrement de I_n (pour $n \geq 2$).

En déduire que $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$ pour $n \to +\infty$.

5) Déterminer la nature des séries $\sum\limits_{n\geq 0} I_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n I_n$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k I_k$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan^{n+1}(t)}{1+\tan(t)}dt$ et $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dt}{1+\tan(t)}$.

6) Vérifier que $S_n = I + (-1)^n J_n$, ce pour tout n.

7) Prouver, par encadrement, que $J_n \to 0$ si $n \to +\infty$.

8) En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_n = I$.

9) Calculer I; en déduire $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

10) En adaptant la démarche précédente, déterminer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

Solution :

9) On calcule I en posant $t = \dfrac{\pi}{4} - u$, il vient alors $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1+\tan(u)}{2}du$ (en utiisant la formule $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$). Dès lors $\boxed{I = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\ln(2)}{4}}$ $\square$

Notons S la somme de la série alternée convergente $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

En utilisant 3), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{n+1}I_n + (-1)^{n+1}I_{n+2} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ puis en sommant de 0 à $+\infty$ puisque nous avons trois termes généraux de séries convergentes :

$-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_n - \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}I_{n+2} = S$ soit $-2I + I_0 - I_1 = S$ (avec 8)) et, en utilisant les données numériques obtenues, il vient $\boxed{S = -\ln(2)}$ $\blacksquare$

10) De la même façon et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n I_{2n} + (-1)^n I_{2n+2} = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$; là encore en sommant de 0 à $+\infty$, on trouve $I_0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ soit $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}}$ $\blacksquare$

Exercice 2 : (X)

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$ et à valeurs strictement positives.

On pose $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} (\dfrac{f(x)}{g(x)})$ et $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} (\dfrac{f(x)}{g(x)})$.

Montrer que $\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leq \dfrac{(M+m)^2}{4Mm}(\int_a^b fg)^2$.

Solution :

Les nombres M et m sont, par le théorème de Weierstrass ou des bornes atteintes, des valeurs prises par $\dfrac{f}{g}$, fonction continue et strictement positive sur le segment $[a,b]$, et ainsi sont strictement positives; ce qui justifie le sens du second membre de l'inégalité à vérifier.

Par définition des nombres M et m, on a $Mg - f \geq 0$ et $f - mg \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b (Mg - f)(f - mg) \geq 0 \Longleftrightarrow (M + m)\int_a^b fg \geq \int_a^b f^2 + Mm\int_a^b g^2$.
En élevant au carré chacun des membres de la dernière inégalités, il vient : $\displaystyle(M + m)^2(\int_a^b fg)^2 \geq ((\int_a^b f^2)^2 - 2Mm(\int_a^b f^2)(\int_a^b g^2) + (Mm)^2(\int_a^b g^2)^2) + 4Mm(\int_a^b f^2)(\int_a^b g^2)$. Comme $\displaystyle(\int_a^b f^2)^2 - 2Mm(\int_a^b f^2)(\int_a^b g^2) + (Mm)^2(\int_a^b g^2)^2 = (\int_a^b f^2 - Mm\int_a^b g^2)^2$, l'inégalité en vue s'obtient■