Test et entraînement (Corrigé)

MATRICES COMPAGNONS ou DE FROEBENIUS

Soient $n \geq 2$ et $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On pose : $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_1 \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & (0) & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$, nommée matrice compagnon de P.

On note χ_P le polynôme caractéristique de C_P.

Un cas particulier

Ici $P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

1) Déterminer χ_P. C_P est-elle diagonalisable ?

Solution :

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $(X-1)(X-2)(X-3)$; il est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. Cette matrice est diagonalisable■

Contexte général

2) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, vérifier que le rang de $\lambda I_n - C_P$ est au moins égal à $n-1$.

Solution :

Les $n-1$ premières colonnes de $\lambda I_n - C_P$ sont visiblement linéairement indépendates d'où le résultat■

3) En déduire que tout sous-espace propre de C_P est de dimension 1.

Solution :

La question précédente montre que la dimension d'un tel sous-espace est ≤ 1.

Par définition un espace propre n'est jamais réduit au vecteur nul donc sa dimension est au moins égal à 1■

4) Etablir que $\chi_P = P$. (Pour cela on pourra ajouter à la première ligne une combinaison de toutes les autres qui devra faire apparaître $P(\lambda)$ en première ligne et dernière colonne).

Solution :

La manipulation $L_1 \leftarrow l_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda^{i-1} L_i$ montre que $\chi_P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(\lambda) \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & (0) & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & -1 & \lambda - a_{n-1} \end{vmatrix}$.

Il suffit alors de développer suivant la première ligne, ce qui donne $\chi_P = (-1)^{n+1} P(\lambda)(-1)^{n-1} = P(\lambda)$■

5) Démontrer que C_P est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples.

Solution :

On sait donc que $\chi_{C_P} = P$.

La condition est alors bien sûr suffisante (Cours).

Si C_P est diagonalisable c'est que P est scindé sur $\mathbb{K}$ et que, pour chaque racine de P il y a égalité entre multiplicité et dimension de l'espace propre correspondant. Cette dernière valant 1 par 3), il en résulte que P est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples■

6) Trouver une matrice non diagonalisable d'ordre 3, à coefficients réels, dont le polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{R}$ et le spectre non réduit à un élément.

Solution :

Il suffit, par exemple, de considérer C_P, où $P = X^2(X-1)$ en vertu de ce qui précède■

Démonstration du théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices compagnons

On note f_p l'endomorphisme canoniquement associé à C_P et $(e_1, ..., e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

7) Etablir que $P(f_P)(e_1) = 0_{\mathbb{K}^n}$ puis que $P(f_P)(e_i) = 0_{\mathbb{K}^n}$ en observant que $e_i = f^{i-1}(e_1)$, ce pour $i \in [\![1, n]\!]$.
Solution :
En observant C_P, on voit immédiatement que $e_i = f(e_1)$, ce pour $i \in [\![2, n]\!]$ donc, par itération $e_3 = f^2(e_1)$,...., $e_n = f^{n-1}(e_1)$.
La dernière colonne de C_P livre : $f(e_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1} \Longleftrightarrow f^n(e_1) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(e_1)$, par ce qui précède.
Ceci se traduit par $P(f)(e_1) = 0_{\mathbb{K}^n}$ donc $f^s(P(f)(e_1)) == 0_{\mathbb{K}^n}$ ce qui s'écrit aussi $f^s o P(f)(e_1) = P(f) o f^s(e_1) = 0_{\mathbb{K}^n}$, ce pour tout entier naturel s puisque deux polynômes d'un même endomorphisme commutent. Il en résulte que $P(f)(e_i) = 0_{\mathbb{K}^n}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$■
8) En déduire que $\chi_P(C_P) = 0_n$.
Solution :
La question précédente montre que la matrice de $P(f)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la matrice nulle donc que $P(C_P) = 0_n$ d'où avec 4) $\boxed{\chi_P(C_P) = 0_n}$, ce qui constitue une preuve du théorème de Cayley-Hamilton pour la matrice C_P■

Démonstration du théorème de Cayley-Hamilton dans le cas général (Centrale MP 2019)

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie ≤ 1 et $f \in L(E)$.
On considère x un vecteur non nul de E.
9) Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que : $\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) = f^p(x)$.
Solution :
Considérons $M = \{q \in \mathbb{N}^*, (x, ..., f^{q-1}(x))$ soit libre$\}$; il s'agit d'une partie non vide ($1 \in M$, puisque $x \neq 0_E$) de $\mathbb{N}$, majorée (par la dimension de E). En tant que telle, elle possède un plus grand élément que l'on note p.
Puisque $p \in M$ on a bien la liberté de la famille $(x, ..., f^{p-1}(x))$ (1).
Mais $p+1 \notin M$ donc $(x, ..., f^p(x))$ est liée, ce qui, combinée à (1), donne que $f^p(x) \in Vect(x, ..., f^{p-1}(x))$ et prouve l'existence (et l'unicité) du p-uplet $(\alpha_0, ..., \alpha_{p-1})$ tel que $\boxed{f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x)}$■
10) Justifier que $F = \mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est stable par f.
Solution :
Il suffit de vérifier que l'image par f de chaque membre de la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ appartient à F. Ce qui est immédiat■
11) Prouver alors que $X^p - \alpha_{p-1} X^{p-1} - \cdots - \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.
Solution :
Puisque F est un sev de E non réduit au vecteur nul et stable par f nous savons (en notant g l'endomorphisme de F induit par f) que χ_g divise χ_f.
En remarquant que la matrice de g dans la base $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ de F est la matrice compagon C_Q, où $Q = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$ et sachant que $\chi_g = \chi_{C_Q} = Q$, nous avons bien que $\boxed{Q = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k | \chi_f}$■
12) En déduire que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.
Solution :
Il existe donc (cf 11)) un élément de $\mathbb{K}[X]$ que nous notons H tel que : $\chi_f = HQ$.
De ceci on déduit que $\chi_f(f) = H(f) o Q(f)$ et $\chi_f(f)(x) = H(f)(Q(f)(x))$.
Mais $Q(f)(x) = f^p(x) - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) = 0_E$ donc $\chi_f(f)(x) = 0_E$, ce pour $\boxed{\text{tout } x \text{ de } E \text{ différent de } 0_E}$.
Conclusion : $\boxed{\chi_f(f) = 0_{L(E)}}$ ■

Endomorphisme Cyclique d'après CCINP PC 2023

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \leq 1$ et $f \in L(E)$.
On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $\left(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\right)$ soit une base de l'espace vectoriel E. Une telle famille se nomme alors cycle de f.
13) on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

a) Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
b) Montrer que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
c) L'endomorphisme g est-il cyclique ?
Solution :
a) Simple vérification matricielle.
b) La relation précédente met en évidence un polynôme annulateur de M à savoir $X^2-X-2 = (x+1)(X-2)$; celui-ci étant scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples, $\boxed{\text{M est dz et } Sp(M) \subset \{1,2\}}$.
Comme M n'est pas scalaire et qu'elle est dz son spectre ne peut être réduit à un élément donc $\boxed{Sp(M) = \{1,2\}}$.
c) Pour tout x (avec a)) la famille $(x, g(x), g^{3-1}(x))$ est liée, ce qui interdit à g d'être cyclique ■
14) Etablir que f est endomorphisme cyclique de E si et seulement s'il existe b une base de E et $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire, de degré n, tels que f soit représenté dans b par C_P.
Solution :
Tautologie■
15) On prend, pour $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on considère $\Delta : Q \in E \to Q(X+1) - Q(X)$.
Etablir que Δ est un endomorphisme cyclique de E dont un cycle est $(X^{n-1}, .., \Delta^{n-1}(X^{n-1}))$
Solution :
Il suffit de vérifier que la famille (de cardinal égal à $n = \dim(E)$) est libre ; ce qui est immédiat car elle est échelonnée en degré■

Commutant d'un endomorphisme cyclique (Centrale MP 2019)

On garde le contexte de la partie précédente en se donnant f un endomorphisme cyclique de E de cycle $(x, f(x), ...f^{n-1}(x))$, où x est un élément de E.
On note $C(f)$ le commutant de f (i.e l'ensemble des $g \in L(E)$ tels que $gof = fog$. Il s'agit d'un sev de $L(E)$.
On suppose que $g \in C(f)$.
16) Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que : $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x)$.
Solution :
Cela résulte du fait que $(x, f(x), ...f^{n-1}(x))$ est une base de E et $g(x) \in E$■
17) Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$ (i.e g est un polynôme en f).
Solution :
Puisque g commute avec f, il commute aussi avec tous les f^p, $p \in \mathbb{N}$.
En particulier $g(f^p(x)) = f^p(g(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(f^p(x))$. Donc en posant $R = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$, on a :
$g(y) = R(f)(y)$ pour tout $y \in \{x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\}$; les endormorphismes g et $R(f)$ produisent le même effet sur tous les membres d'une base de E, ils son égaux soit $\boxed{g = R(f) \in \mathbb{K}_{n-1}[f]}$ ■
18) Etablir que $g \in C(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$. Que peut-on dire de la dimension du commutant de f ?
Solution :
La condition donnée est nécessaire d'après la question précédente ; elle est évidemment suffisante puisque tout polynôme en f commute avec f. On dispose donc de $(id_E, f, ..., f^{n-1})$ comme famille génératrice de $C(f)$; montrons qu'elle est aussi libre en se donnant $a_0, ..., a_{n-1}$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0_{L(E)}$.
L'évaluation en x de cette égalité et la liberté de $(x, f(x), ...f^{n-1}(x))$ conduisent immédiatement à la nullité de tous les a_k.
Bilan : $\boxed{\dim(C(f)) = n = \dim(E)}$■