Intégrabilité et comparaison. Exemples (Suite du cours)

On reprend partiellement la partie consacrée à l'absolue convergence.
a et b sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que $a < b$. I désigne l'intervalle $[a, b[$ (auquel a est réel) ou l'intervalle $]a, b]$ (cette fois b est réel).

1 Intégrabilité et comparaison

Tout découle du principe de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions positives (cf cours).

A SAVOIR ABSOLUMENT 1 $I = [a, b[$
Soient f et g dans $C_M(I, \mathbb{K})$.
i) $\boxed{g \in L^1(I, \mathbb{K}) \ \boxed{\textit{et}}\ |f| \leq |g| \textit{ au voisinage de } b \Longrightarrow f \in L^1(I, \mathbb{K}).}$
(Contraposée : $\boxed{g \notin L^1(I, \mathbb{K}) \ \boxed{\textit{et}}\ |g| \leq |f| \textit{ au voisinage de } b \Longrightarrow f \notin L^1(I, \mathbb{K}).}$*)*
Plus généralement :
ii) $\boxed{g \in L^1(I, \mathbb{K}) \ \boxed{\textit{et}}\ f(x) \underset{x \to b}{=} O(g(x)) \Longrightarrow f \in L^1(I, \mathbb{K}).}$
iii) $\boxed{g \in L^1(I, \mathbb{K}) \ \boxed{\textit{et}}\ f(x) \underset{x \to b}{=} o(g(x)) \Longrightarrow f \in L^1(I, \mathbb{K}).}$
iv) $\boxed{|f(x)| \underset{x \to b}{\sim} |g(x)| \Longrightarrow \int_I |f| \ \boxed{\textit{et}}\ \int_I |g| \textit{ sont de même nature.}}$

Remarque 1 *On dispose des mêmes principes de comparaison sur $I =]a, b]$, il suffit de remplacer b par a dans les hypothèses de comparaison dans la proposition précédente.*

Une conséquence du résultat précédent il s'obtient par comparaison avec les intégrandes des intégrales généralisées de Riemann.

Corollaire 1 *(Règle du x^α en $+$)*
Soient $c > 0$ et $f \in C_M([c, +\infty[, \mathbb{K})$.
i) $\boxed{\exists \alpha > 1 \textit{ tel que } x^\alpha f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0 \Longrightarrow f \in L^1([c, +\infty[, \mathbb{K})}$.
ii) $\boxed{\exists \alpha \leq 1 \textit{ tel que } x^\alpha |f(x)| \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty \Longrightarrow f \notin L^1([c, +\infty[, \mathbb{K})}$.

Remarque 2 *On dispose d'une règle analogue en 0 que je vous laisse énoncer.*

Pour bien utiliser ces principes, il faut disposer de fonctions connues comme étant intégrables. C'est là qu'interviennent les intégrales de référence.

2 Les intégrales de référence : le retour

2.1 Intégrales généralisées de Riemann et filiation

α étant un réel :

A SAVOIR ABSOLUMENT 2 *o) $t \to \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.*
i) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
ii) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
Autrement dit :
$a > 0$ étant donné :
i) $t \to \dfrac{1}{t^\alpha} \in L^1(]0, a]) \Longleftrightarrow \alpha < 1$.
ii) $t \to \dfrac{1}{t^\alpha} \in L^1([a, +\infty[) \Longleftrightarrow \alpha > 1$.

De là par changement de variable affine pertinent et assez évident (les intégrandes étant continues et positives sur $]a, b[$) :

Corollaire 2 *$a < b$ étant des reéls*
i) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}dt$ converge ssi $\alpha < 1$.
ii) $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}dt$ converge ssi $\alpha < 1$.

Il est aisé de traduire ce corollaire en terme d'intégrabilité.

2.2 Intégrales généralisées de type exponentiel

A SAVOIR ABSOLUMENT 3 *α étant un complexe :*
o) $t \to e^{-\alpha t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
$\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt$ converge (ACV) si et seulement si $\Re(\alpha) > 0$, dans ce cas $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}$.
Donc dans le même contexte :
$t \to e^{-\alpha t} \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \Longleftrightarrow \Re(\alpha) > 0$.

2.3 Intégrabilité sur]0,1] ou]0,a], a>0 du logarithme

Proposition 1 *o) $\ln$ est continue sur]0,1].*
i) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ converge (absolument aussi).
ii) $\ln \in L^1(]0, 1])$.

3 Plan d'étude d'une intégrale généralisée

A SAVOIR ABSOLUMENT 4 *(et à suivre)// a) Préciser l'intervalle de continuité (voire de CM) de l'intégrande (nommée f ici) relativement à l'intervalle d'intégration. En déduire les bornes à problème (1 dans le cas semi-ouvert, 2 pour intervalle ouvert).*
b) Si en une borne à problème FINIE, f possède une limite FINIE; il y a fausse singularité et en cette borne l'IG CV. ATTENTION ceci n'a aucun sens en $\pm\infty$!!
c) On privilégie l'emploi des principes de comparaison en les appliquant à bon escient (les appliquer à $|f|$ pour éviter de tomber dans les pièges habituels).
d) Si ceux-ci échouent, on peut utiliser une IPP ou un changement de variable.

Traitons quelques situations; f désignera systématiquement l'intégrande.

Exemple 1 *(Intégrale de Gauss)*
Nature de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ *? On note que* f *est continue (donc CM) sur* $\mathbb{R}_+$ *et que, pour* $t \geq 1$ *(puisque dans ce cas* $t \leq t^2$*) nous avons* $|f(t)| = e^{-t^2} \leq e^{-t}$*; la fonction majorante est notoirement intégrable sur* $[1, +\infty[$ *donc par comparaison, notre IG CV*■

Exemple 2 *Nature de* $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^3)}$*?*
f *est continue (donc CM) sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*
Deux bornes problématiques 0 *et* $+\infty$*.*
En 0*,* f *n'a pas de limite finie (pas d'espoir de fausse singularité donc) mais* $|f(x)| \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$*. On sait que* $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ *est intégrable sur* $]0, 1]$*, donc par comparaison,* $\int_0^1 |f(x)| dx$ *converge soit aussi* $\int_0^1 f(x) dx$*.*
En $+\infty$ *:* $|f(x)| \sim \frac{1}{x^{5/2}}$*; comme* $x \to \frac{1}{x^{5/2}}$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *, on a, par le même principe de comparaison la convergence de* $\int_1^{+\infty} f(x) dx$*.*
Conclusion $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^3)}$ *converge*■