DL3 (2 heures max). Intégration. Réduction

Travailler qualité de la rédaction et rigueur des arguments donc (devise de Gauss) " Pauca sed matura"

Toute copie mal présentée ne sera pas corrigée.

Exercice 1 : (Réduction)
On se donne $A \in M_n(K) = E$ et on définit $f : M \in E \to AM$.
1) Etablir que $f \in L(E)$.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
2) Etablir que $P(f)(M) = P(A)M$, ce pour tout $M \in E$.
3) Comparer les spectres de f et A.
4) Déduire de 2) que f est diagonalisable si et seulement si A l'est.
5) Peut-on dans l'équivalence précédente remplacer diagonalisable par trigonalisable? Justifier votre réponse.
6) (Facultatif) Soit $t \in \mathbb{K}$. Vérifier que $M \in Ker(f - tid_E) \iff \forall i \in [\![1, n]\!], C_i(M) \in Ker(A - tI_n)$.
En déduire la trace et le déterminant de f lorsque A est diagonalisable.
Etendre ces résultats au cas général.

Exercice 2 : (Intégration basique)
Pour tout intervalle non trivial I, on pose : $L^2(I, \mathbb{K}) = \{f \in C_M(I, \mathbb{K})\text{telles que} f^2 \in L^1(I, \mathbb{K})\}$.
1) Donner pour $I = [1, +\infty[$ un élément de $L^2(I, \mathbb{R})$ n'appartenant pas à $L^1(I, \mathbb{R})$.
2) Donner pour $I =]0, 1]$ un élément de $L^1(I, \mathbb{R})$ n'appartenant pas à $L^2(I, \mathbb{R})$.
3)a) Etablir que, pour $(u, v) \in \mathbb{K}^2$, on a : $|uv| \leq \dfrac{|u|^2 + |v|^2}{2}$.
b) $\boxed{\text{En déduire que si } f, g \text{ sont dans } L^2(I, \mathbb{K}) \text{ alors } fg \in L^1(I, \mathbb{K})}$[1].
c) Démontrer alors que, muni des opérations usuelles, $L^2(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Exercice 3 : (Intégration (Hardy : A course of pure mathematics exercice 33 page 396))
Pour $x \in [0, \pi[$, on pose $\phi(x) = \dfrac{1 + \sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}$.
f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
1) Pour $f : x \to x^\alpha$, où alpha est un réel, étudier la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\pi f(\phi(x)) \frac{dx}{\sqrt{\sin(x)}}$.
On revient au contexte général et on définit $\Phi(t) = 2 \arcsin\left(\dfrac{1 - \sin^2(t)}{1 + \sin^2(t)}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.
2) Vérifier que Φ est une bijection, strictement décroissante et de classe C^1 de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \pi[$.
3) A l'aide d'un changement de variable montrer que $\displaystyle\int_0^\pi f(\phi(x)) \frac{dx}{\sqrt{\sin(x)}}$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^\pi f\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) \frac{dx}{\sqrt{\sin(x)}}$. (C'est assez technique)

[1] énoncé modifié