Feuille d'exercices 4
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 3.

- $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$,
- $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z+1}{z-1} = -\dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$,
- $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \dfrac{z+1}{z-1}\dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = 1 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

Exercice 4.

(d) Cette équation est définie sur $\mathbb{C}^*$.
De plus : $z + \dfrac{1}{z} = i\left(\dfrac{3}{z} - 1\right) \Leftrightarrow z^2 + (1+i)z - 3i = 0$.
C'est une équation du second degré, de discriminant $\Delta = (1+i)^2 + 4 \times 3i = 14i = 14e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Une racine carrée de Δ est alors $\delta = \sqrt{14}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{7} + \sqrt{7}i$.
Les solutions de l'équation sont donc $z_{1,2} = \dfrac{-(1+i) \pm \delta}{2} = -\dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{2} - \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{2}i$.

Exercice 8. Supposons qu'il existe une solution z.
Alors $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, donc $|z| = 1$, donc $z \in \mathbb{U}$.
De plus, $|z[= |1 - z|$, donc le point d'affixe z appartient à la médiatrice des points d'affixe 0 et 1, c'est-à-dire à la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.
Donc $z = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$.
Réciproquement, $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sont solutions, donc : $S = \left\{e^{i\frac{\pi}{3}},\ e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$.

Exercice 11.

(c)

$$\begin{aligned}
\cos^2(2x)\sin(4x) &= \left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)^2 \frac{e^{i4x}-e^{-i4x}}{2i} \\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{i8x} - e^{-i8x} + 2e^{i4x} - 2e^{-i4x}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sin(8x) + \frac{1}{2}\sin(4x).
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\cos(x)\cos(2x)\cos(3x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2} \\
&= \frac{1}{8}\left(2 + e^{i2x} + e^{-i2x} + e^{i4x} + e^{-i4x} + e^{i6x} + e^{-i6x}\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{4}\cos(6x).
\end{aligned}$$

Exercice 13.

(a)

$$\begin{aligned} \sin^2 x \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \mod 2\pi, \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \cos x > \sin x &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \mod 2\pi \\ &\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\mod 2\pi, \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \sin x < \sqrt{3}\cos x &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \mod 2\pi \\ &\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[\mod 2\pi, \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \mod 2\pi \\ &\Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mod 2\pi. \end{aligned}$$

Exercice 14.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)$, où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} &= \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{i\frac{nx}{2}} - e^{-i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\ &= e^{i\frac{(n-1)x}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \end{aligned}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}\right)$, où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx} &= (1+e^{ix})^n\\ &= e^{i\frac{nx}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}\right)\\ &= e^{i\frac{nx}{2}}\times 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right),\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2kx)\right)=\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{i2kx}\right)$, où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}e^{i2kx} &= \frac{1-e^{i2nx}}{1-e^{i2x}}\\ &= \frac{e^{inx}}{e^{ix}}\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{e^{ix}-e^{-ix}}\\ &= e^{i(n-1)x}\frac{\sin(nx)}{\sin(x)},\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)=\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\cos((n-1)x)\sin(nx)}{\sin(x)}$.

Exercice 20.

(b) Les points sont alignés si et seulement si $\dfrac{\frac{1}{z}-z}{(z-i)-z}\in\mathbb{R}$. Or : $\dfrac{\frac{1}{z}-z}{(z-i)-z}=i\left(\dfrac{1}{z}-z\right)$, donc :

$$\frac{\frac{1}{z}-z}{(z-i)-z}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}-z\right)=0\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+y^2}=x\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x^2+y^2=1.$$

L'ensemble des points solution est donc la réunion de l'axe des ordonnées et du cercle unité.