

Devoir à la maison n° 4

Exercice 1. Soit r dans \mathbb{R}_+^* . Soient A, B et C trois points distincts du plan complexe situés sur le cercle de centre O (l'origine du plan) et de rayon r . On note a, b et c les affixes respectives de ces points, et α, β et γ des arguments de a, b et c respectivement.

On pose $h = a + b + c$ et on note H le point d'affixe h .

1. Donner les formes exponentielles de a, b et c .
2. Montrer que $\frac{h-a}{b-c}$ est imaginaire pur. Que peut-on en déduire géométriquement ?
3. Justifier (sans faire de calculs) que $\frac{h-b}{c-a}$ et $\frac{h-c}{a-b}$ sont également imaginaires purs.
Que représente H pour le triangle ABC ?
4. Soit G le centre de gravité du triangle ABC . Montrer que les points O, G et H sont alignés.
5. Faire un dessin !

Exercice 2. On considère la fonction *tangente hyperbolique* $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

1. (a) Montrer que la fonction th est impaire. Justifier qu'elle est dérivable sur \mathbb{R} et exprimer sa dérivée de deux façons différentes : avec la fonction ch et avec la fonction th .
(b) Étudier les variations de th . Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 à son graphe.
(c) Tracer le graphe de th .
2. (a) Montrer que la fonction th réalise une bijection de \mathbb{R} dans un intervalle à déterminer.
(b) Déterminer la bijection réciproque. Cette fonction est appelée *argument tangente hyperbolique*, notée argth .
(c) Déterminer la dérivée de la fonction argth , et tracer son graphe dans le même repère que celui de th .