TD 14 : Corrigé

Intégrales généralisées

Exercice 1 : (Intégrabilité, Mines)
Intégrabilité de $x > 0 \to |\sin(x)|^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 2 : (ENS)
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante.
Vérifier que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{\int_x^\infty f(t)dt} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.
Solution : Se donnant $\epsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $-f'(x) \leq \epsilon f(x)$ (f étant décroissante, sa dérivée est négative).
Soient $A \leq x \leq X$. Par intégration de chaque membre de l'inégalité précédente entre x et X, il vient : $f(x) - f(X) \leq \epsilon \displaystyle\int_x^X f(t)dt$.
En faisant tendre X vers $+\infty$ (f y possède une limite nulle car cette fonction est intégrable et cette limite existe puisque f décroissante et positive cf TD13), nous obtenons (conservation des inégalités à la limite) :
Il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $f(x) \leq \epsilon \displaystyle\int_x^\infty f(t)dt$; autrement dit : $\dfrac{f(x)}{\int_x^\infty f(t)dt} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$■

Normes

Ces deux exercices ont été corrigés en classe, un par groupe; se tourner vers l'autre groupe le cas échéant.
Exercice 3 : (Normes équivalentes)
On note E l'ensemble des fonctions C^1 sur $I = [0, 1]$ et à valeurs réelles s'annulant en 0.
Pour $f \in E$ on pose $A(f) = \|f + f'\|_\infty^I$ et $B(f) = \|f\|_\infty^I + \|f'\|_\infty^I$.
Prouver que A et B sont des normes équivalentes sur E.
Solution : a) On prouve que A et B sont des normes sur E dont on vérifie aisément que c'est un ev car sev de $C^1(I)$.
On rappelle que la norme infinie sur I constitue une norme de $C^1(I)$ donc de E, il en résulte facilement que B est une norme de E. Pour A c'est à peu près la même chose sauf pour la séparation.
Soit alors $f \in E$ telle que $A(f) = 0$, puisque la séparation est valide pour $\|.\|_\infty^I$, nous obtenons $f + f' = 0_E$.
Dès lors f est solution du problème de Cauchy : $y' + y = 0$ et $y(0) = 0$.
Ce problème ayant une solution unique et la fonction nulle sur I en étant une, nous avons bien $f = 0$.
b) L'inégalité triangulaire de $\|.\|_\infty^I$ montre que $A \leq B$■
L'obtention de l'autre inégalité est plus délicate.
$\boxed{\text{Tuteur :}}$
Soient $f \in E$ et $g : t \in I \to e^t f(t)$.
i) Vérifier que $B(f) \leq A(f) + 2\|f\|_\infty^I$.
ii) Etablir que $\|f\|_\infty^I \leq \|g\|_\infty^I$.
iii) En observant que, pour tout $x \in I$: $g(x) = \displaystyle\int_0^x g'(t)dt$, prouver que A et B sont équivalentes■

Exercice 4 : (Normes non équivalentes)
On note E l'ensemble des fonctions réelles et lipschitziennes sur $I = [0, 1]$.
a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
Pour $f \in E$, on définit $K(f) = \displaystyle\sup_{0\leq x<y\leq 1} \frac{|f(y) - f(x)|}{y - x}$.
On pose alors $N(f) = |f(0)| + K(f)$.
b) Prouver que N est une norme sur E.

c) Est-elle équivalente à $\|.\|_\infty^I$?
Solution : a) Vous montrez que E est un sev de $C^0(I)$
b) Il faut d'abord justifier l'existence de $K(f)$. Ce qui résulte de, pour f lipschitzienne, l'ensemble $\{\frac{|f(y)-f(x)|}{y-x}, 0 \leq x < y \leq 1\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ que l'on note X_f.
On se donne f et g dans E et λ un réel.
i) $K(f)$ est positif comme majorant d'une partie de $\mathbb{R}_+$ donc N aussi.
ii) Si $N(f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $K(f) = 0$. Ceci implique $f(0) = 0$ et $X_f = \{0\}$ donc $f(0) = 0$ et f constante soit $f = 0$. Séparation vérifiée.
iii) D'après votre cours $|\lambda \sup(X_f)| = \sup(X_{|\lambda| f}$. Ceci donne l'homogénéité de N.
iv) Montrons que K satisfait l'inégalité triangulaire; cela l'entraînera pour N.
Pour tout $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$, on a $\frac{|f(y)-f(x)|}{y-x} \leq K(f)$ et $\frac{|g(y)-g(x)|}{y-x} \leq K(g)$ donc (inégalité triangulaire pour valeur absolue)$\frac{|(f+g)(y)-(f+g)(x)|}{y-x} \leq K(f)+K(g)$. Ainsi $K(f)+K(g)$ majore X_{f+g} et, par passage à la borne supérieure, il vient $K(f+g) \leq K(f) + K(g)$■

$\boxed{\text{Tuteur :}}$

c)i) Prouver avec le théorème des bornes atteintes que $N \geq \|.\|_\infty^I$.
ii) En supposant nos normes équivalentes et en utilisant $f_n : t \in I \to t^n$, ce pour tout n, aboutir à une contradiction.

Suites de fonctions

Exercice 5 : (Modes de convergence)
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(x\sqrt{n})$.
a) Convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_+$?
b) Convergence uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_+$?
c) Soit $\alpha > 0$. Convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[\alpha, +\infty[$?
d) Convergence uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 6 : (Mines PSI)
Pour $x > 0$, on pose $f_0(x) = x$ et, pour tout n, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(f_n(x) + \frac{1}{f_n(x)})$.
Etude de la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ de la suite (f_n).
Solution :
Fixons $x > 0$ et posons, pour simplifier, $u_n = f_n(x)$.
On va montrer que la suite (u_n) converge.
L'étude de la fonction $g : x > 0 \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ montre que g décroît entre 0 et 1 puis croît.
Ce qui montre que $g(x) \leq 1$ pour tout $x > 0$ donc $u_n \geq 1$ si $n \geq 1$ puisque $u_n = g(u_{n-1}$ $(\star)$.
Pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{u_n} - u_n) \leq 0$ puisque $u_n \geq 1$ donc (u_n) est une suite décroissante à partir du rang 1 et elle est minorée par 1. Elle converge donc vers $L \geq 1$.
Enfin, en passant à la limite dans $(\star)$, nous obtenons $L = \frac{1}{2}(L + \frac{1}{L})$ soit $L = \mp 1$ donc $L = 1$ par ce qui précède.

$\boxed{(f_n) \overset{CVS}{\to} 1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$□

On peut observer que $\forall x > 0, g(x) \geq \frac{x}{2}$. Donc (simple récurrence) :
$\forall x > 0, \forall n, f_n(x) \geq \frac{x}{2^n}$.
Par conséquent la suite $(f_n(2^{n+1}) - 1)_n$ ne peut pas converger vers 0 (car toujours plus grande que 1).

$\boxed{\text{Il n'y a pas CVU de la suite } (f_n) \text{ vers 1 sur } \mathbb{R}_+^*}$□

En revanche (mais ce n'était pas demandé), il y a CVU sur tout intervalle du type $[1, a]$.

Exercice 7 : (X)

Soient $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et, pour tout n et tout $x \in [0,1]$, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$.
On admet que la suite de fonctions (P_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes à coefficients entiers.

Solution :

Supposons que f soit limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes à coefficients entiers que nous notons (Q_n).
Ce contexte implique que les suites à termes entiers $(Q_n(0))$ et $(Q_n(1))$ convergent respectivement vers $f(0)$ et $f(1)$. Il en résulte une condition nécessaire de notre problématique : $\boxed{(f(0), f(1)) \in \mathbb{Z}^2}$ $\square$
Il s'agit maintenant de prouver que cette condition est aussi suffisante.
Je vous laisse encore chercher un peu.....