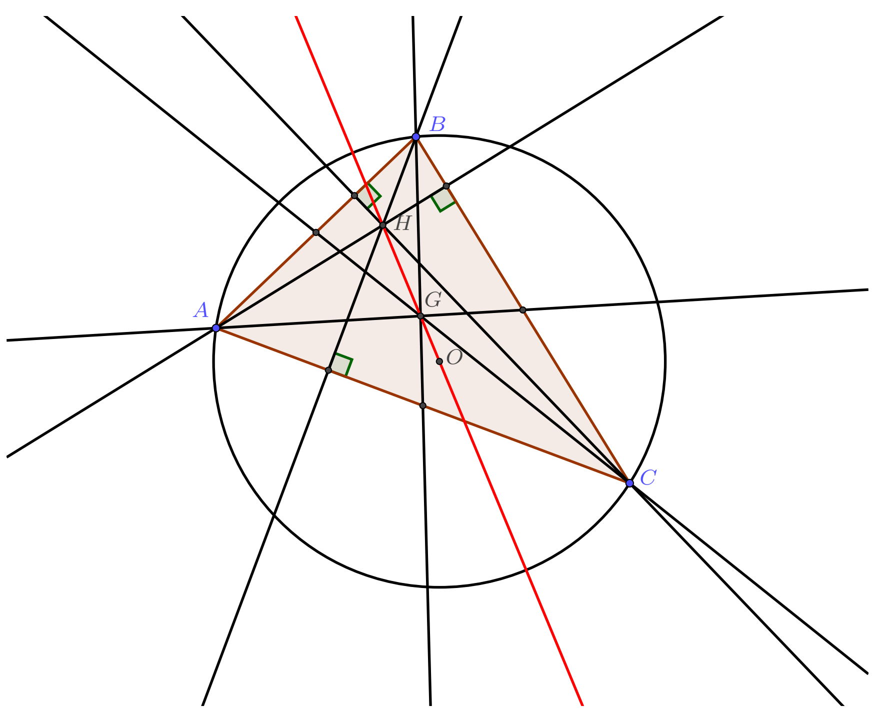
Devoir à la maison n° 4
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. On a $a = re^{i\alpha}$, $b = re^{i\beta}$ et $c = re^{i\gamma}$.
2. On a :

$$\begin{aligned}\frac{h-a}{b-c} &= \frac{b+c}{b-c} = \frac{e^{i\beta}+e^{i\gamma}}{e^{i\beta}-e^{i\gamma}} = \frac{1+e^{i(\gamma-\beta)}}{1-e^{i(\gamma-\beta)}} = -\frac{e^{i\frac{\gamma-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\gamma-\beta}{2}}}{e^{i\frac{\gamma-\beta}{2}}-e^{-i\frac{\gamma-\beta}{2}}} = -\frac{2\cos\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} \\ &= i\text{cotan}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right) \in i\mathbb{R}.\end{aligned}$$

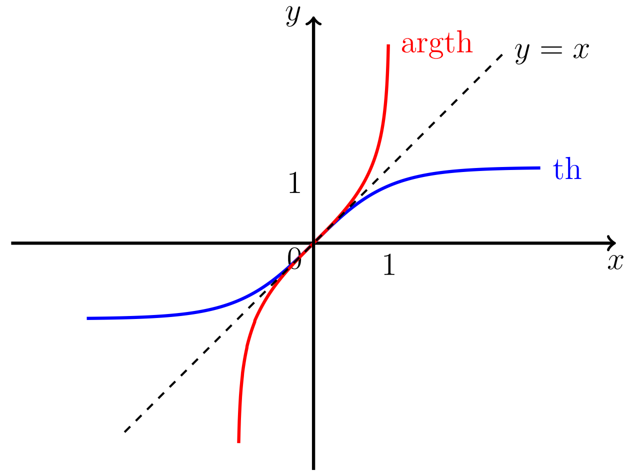
   Les droites (AH) et (BC) sont donc orthogonales.
3. L'affixe h est symétrique en a, b et c ; on peut donc échanger a, b et c dans le résultat précédent. Les droites (BH) et (AC) sont donc orthogonales, de même que les droites (CH) et (AB). Le point H est donc l'orthocentre du triangle ABC.
4. Notons g l'affixe de G, on a $g = \dfrac{a+b+c}{3}$, donc $\dfrac{g-0}{h-0} = \dfrac{1}{3} \in \mathbb{R}$, donc O, G et H sont alignés.
   Remarque : On vient de montrer que le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre d'un triangle quelconque sont alignés. La droite ainsi formée est la droite d'Euler *du triangle.*
5. 

Exercice 2.

1. (a) On sait que la fonction ch est paire et que la fonction sh est impaire, donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(-x) = \dfrac{\mathrm{sh}(-x)}{\mathrm{ch}(-x)} = \dfrac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = -\mathrm{th}(x)$. Donc la fonction th est impaire. Comme les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction th l'est également, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = \dfrac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$, donc $\mathrm{th}' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2} = 1 - \mathrm{th}^2$.

   (b) Comme $\mathrm{th}' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2} > 0$, la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sa tangente en 0 a pour équation $y = \mathrm{th}'(0) \times (x - 0) + \mathrm{th}(0) = x$.

   (c)



2. (a) Remarquons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$.
   Comme la fonction th est paire, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection monotone, th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{th}(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x), \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x)\right[$ $=]-1, 1[$.

   (b) Soient x dans $\mathbb{R}$ et y dans $]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned} y = \mathrm{th}(x) &\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\ &\iff ye^{2x} + y = e^{2x} - 1 \\ &\iff e^{2x}(1 - y) = 1 + y \\ &\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\ &\iff x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right). \end{aligned}$$

   La réciproque est donc la fonction $\mathrm{argth} : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \end{array} \right.$.

   (c) La fonction argth est dérivable sur $]-1,1[$ et d'après la formule de la dérivée réciproque : $\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{argth}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{th}'(\mathrm{argth}(x))} = \dfrac{1}{1 - \mathrm{th}^2(\mathrm{argth}(x))} = \dfrac{1}{1 - x^2}$.