TD 15 : Corrigé partie Centrale

1 Centrale PC écrit

I Fonction zêta

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.
1) Déterminer D_ζ.
2) Montrer que ζ est continue sur D_ζ.
3) Etudier le sens de variations de ζ.
4) Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$. La déterminer.
5) Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.
Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.
6) En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

7) Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
8) Retrouver la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
9) Donner l'allure de la courbe représentative de ζ.

II Etude d'une fonction définie par une somme

Dans cette partie, f désigne la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right).$$

On note D_f l'ensemble de définition de f.

II.A - Ensemble de définition et variations

10) Déterminer D_f.
11) Montrer que f est continue sur D_f et étudier ses variations.

II.B - Equivalents

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
12) Calculer $f(k)$.
13) En déduire un équivalent de f en $+\infty$.
14) Pour tout $x \in D_f$, vérifier que $x + k \in D_f$, puis calculer $f(x+k) - f(x)$ en travaillant sur les sommes partielles.
15) En déduire un équivalent de f en $-k$.
Quelles sont les limites à droite et à gauche de f en $-k$?

II.C - Dérivées successives

16) Montrer que f est de classe C^∞ sur D_f et calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Solution :

1) 0n cherche donc l'ensemble des réels x tels que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge. Ceci se produit (critère de Riemann) ssi $x > 1$ donc $\boxed{D_\zeta =]1, +\infty[}$ ■

2) Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$, $u_n(x) = \frac{1}{n^x} = \exp(-x\ln(n))$ en vue d'appliquer **le théorème de continuité pour les séries de fonctions**.

Pour cela on note déjà que chaque u_n est notoirement continue sur D_ζ.

Prenons un segment $[a, b] \subset D_\zeta$ (notez que ceci implique $a > 1$) et établissons la convergence normale sur ce segment de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Soit $n \geq 1$, $\forall x \in [a, b], |u_n(x)| = \exp(-x\ln(n)) \leq \exp(-a\ln(n))$ (par croissance de l'exponentielle). Ainsi $\forall n \geq 1, \forall x \in [a, b], |u_n(x)| \leq \frac{1}{n^a}$ et la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge (puisque $a > 1$), nous avons établi la convergence normale voulue.

Le théorème de continuité, appliqué ici à la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$, assure de la continuité de la somme de cette série de fonctions sur D_ζ.

Autrement dit ζ est continue sur son domaine de définition ■

NB : Nous avons en fait montré que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ convergeait normalement sur tout intervalle du type $[a, \infty[$, où $a > 1$.

3) Chaque u_n est décroissante sur D_ζ donc, par croissance des sommes de séries convergentes, ζ y décroît■

4) Tout d'abord la positivité de la fonction ζ et sa décroissance font qu'elle admet une limite (finie et positive) en $+\infty$.

De plus pour $n \geq 2$ $u_n(x) = \exp(-x\ln(n)) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ (en effet $\ln(n) > 0$ alors que $u_1(x) = 1 \underset{x\to+\infty}{\to} 1$.

Il en résulte bien que chaque u_n possède une limite en $+\infty$ et, puisque (comme observé ci-dessus)la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[2, \infty[$, nous pouvons utiliser le théorème de la double-limite qui nous dit ici que : $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n)(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 1$. Soit aussi $\boxed{\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 1}$ ■

5) Posons, pour $x > 1$ et $t \geq 1$, $g_x(t) = t^{-x}$. Cette fonction est positive et décroissante. Il en résulte immédiatement l'encadrement demandé■

$x > 1$ est fixé dans la question suivante.

6) En sommant l'encadrement précédent de 2 à l'infini (la convergence de la STP $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ nous certifie que les intégrales génériisées utilisées convergent, ce que vous pouvez vérifier aussi) nous obtenons :

$$\int_2^{+\infty} g_x(t)dt \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$$

Puis en ajoutant 1 à chaque membre de cet encadrement et en observant qu'une primitive de g_x est $t \to \frac{t^{-x+1}}{1-x}$, il vient (après utilisation du théorème fondamental du calcul intégral généralisé) :

$1 + [\frac{t^{-x+1}}{1-x}]_{t=2}^{t=+\infty} \leq \zeta(x) \leq 1 + [\frac{t^{-x+1}}{1-x}]_{t=1}^{t=+\infty}$ soit finalement $\boxed{1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}}$ ■

7) On a immédiatement avec la fonction minorante de l'encadrement précédent $\boxed{\zeta(x) \underset{x\to 1}{\to} +\infty}$ ■

8) On retrouve le résultat établi en Q4 grâce à Q6 et au théorème des gendarmes■

10) Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^* = X$, nous posons $f_n(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}$.

Fixons $x \in X$ et montrons que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge (absolument).

En effet $|f_n(x)| = \frac{|x|}{n(n+x)}$ (pour n assez grand) donc $|f_n(x)| \sim \frac{|x|}{n^2}$, ce qui montre bien l'assertion en vue.

La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur X donc f est au moins définie sur cet ensemble mais on ne peut évidemment pas faire plus donc $X = D_f$■

11) On va à nouveau employer **le théorème de continuité pour les séries de fonctions**.

Chaque f_n est continue sur X (qui n'est pas un intervalle).

Prenons un segment $[a, b]$ inclus dans X et fixons un entier naturel $n \geq 1$; il existe un entier m tel que $n + a > 0$ pour tout $n \geq m$. On peut décomposer $f = (\sum\limits_{n=1}^{m-1} f_n) + \sum\limits_{n=m}^{\infty} f_n$ et, $\sum\limits_{n=1}^{m-1} f_n$ étant continue sur $[a, b]$ (comme SOMME FINIE de telles fonctions sur ce segment), il nous suffit de vérifier la CVN sur $[a, b]$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq m} f_n$. Or $\forall x \in [a, b]$ et $\forall n \geq m, |f_n(x)| = \dfrac{|x|}{n(n + x)} \leq \dfrac{|a| + |b|}{n(n + a)}$. On reconnaît en le majorant le terme général d'une série convergente, nous avons donc bien prouvé que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq m} f_n$ convergeait normalement sur $[a, b]$ et ainsi obtenu la continuité de f sur un tel segment (via le théorème de continuité); le caractère quelconque de ce segment fait que cette continuité s'étend bien à D_f.

Les fonctions f_n sont toutes décroissantes sur chaque intervalle inclus dans D_f donc (cf Q3), f possède cette même propriété■

12) et 14) En premier lieu si $x \in D_f$ c'est que x n'est pas un entier relatif strictement négatif, ce qui est aussi le cas de $x + k$ qui est bien dans D_f.

Pour $x \in D_f$, $f(x + 1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}((\dfrac{1}{n + 1 + x} - \dfrac{1}{n + 1}) + (\dfrac{1}{n + 1} - \dfrac{1}{n}))$ Par linéarité de la somme des séries convergentes (les termes généraux sont des $O(1/n^2)$), et télescopage classique (et fait bien souvent via les sommes partielles) nous obtenons :

$f(x + 1) = f(x) - f_1(x) - 1$ ou $\boxed{f(x + 1) = f(x) - \dfrac{1}{x + 1} \ (*)}$.

On somme alors les relations (*) écrites pour $x, x + 1, ..., x + k - 1$ et, après un télescopage simplificateur, il vient : $\boxed{f(x + k) = f(x) - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{x + i} \ (**)}$ et, en spécialisant en 0 $f(k) = f(0) - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{i}$ soit $\boxed{f(k) = -H_k \ (***)}$■

13) On rappelle que si $k \to \infty$, $\boxed{H_k \sim \ln(k)}$ et aussi que $\ln(k + 1) \sim \ln(k)$ et qu'enfin (si $E(x)$ désigne la partie entière de x) $E(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x$.

La décroissance de f sur $\mathbb{R}_+$ donne ($x \to \infty$) $f(E(x)+1) \leq f(x) \leq f(E(x))$; ce qui précède (via gendarmes) donne que $f(x) \sim -\ln(E(x))$ or $\ln(x) - \ln(E(x)) = \ln(\dfrac{x}{E(x)}) \underset{x\to\infty}{\to} 0$ donc $\ln(x) \sim \ln(E(x))$ et finalement $\boxed{f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} -\ln(x)}$■

15) (**) donne clairement,f étant continue en 0 : $\boxed{f(x) \underset{x\to -k}{\sim} \dfrac{1}{x + k}}$.

Il en résulte que la limite à droite (resp. à gauche) est $+\infty$(resp.$-\infty$)■

16) Le parcours du combattant continue, nous allons utiliser le **théorème de dérivation successive terme à terme.**

A cette fin, on observe que toutes les fonctions f_n sont rationnelles donc de classe C^∞ sur D_f; nous savons que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur cet ensemble. Fixons $k \geq 1$ et reprenons les notations utilisées dans notre réponse à Q11; nous allons vérifier que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq m} f_n^{(k)}$ converge normalement sur le segment $[a, b]$ (La SOMME FINIE $\sum\limits_{n=1}^{m-1} f_n$ étant de classe C^∞ sur notre segment, cette fois).

Pour tout $n \geq m$ et tout $x \in [a, b]$, $|f_n^{(k)}(x)| = |\dfrac{(-1)^k k!}{(x + n)^{k+1}}| \leq \dfrac{k!}{(n + a)^{k+1}}$. Comme $k \geq 1$, $\dfrac{k!}{(n + a)^{k+1}}$ est le TG d'une STP convergente.

Bilan 1 : Pour tout $k \geq 1, \sum\limits_{n\geq m} f_n^{(k)}$ converge normalement sur le segment $[a, b]$(et CVS sur ce même segment), ceci nous permet de dire que f, par théorème de dérivation terme à terme appliqué à $\sum\limits_{n\geq m} f_n^{(k)}$, que sa somme (donc $f = (\sum_{n=1}^{m-1} f_n) + \sum_{n=m}^{\infty} f_n$ aussi) est de classe C^k sur ce segment et que (avec la décomposition ci-dessus) :

$$\boxed{\forall k \geq 1, \forall x \in [a,b], f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^{k+1}} (\star)}.$$

Comme le segment est arbitraire et que tout élément de D_f appartient à un tel segment, nous avons :
Bilan 2 : f est de C^{∞} sur D_f et la formule $(\star)$ est valable pour tout $x \in D_f$ $\blacksquare$