TD 16 Corrigé

Exercice 1 : (CCINP PSI)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,1]$, on définit $f_n(t) = \dfrac{(1+\frac{t}{n})^n - 1}{t}$.
A l'aide du théorème de convergence dominée (on rappelle que $1+u \leq e^u$ pour tout réel u), justifier l'intégrabilité de chaque f_n sur $]0,1]$ et montrer que la suite $(I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n)$ converge vers une limite que l'on donnera comme intégrale.

Exercice 2 : (CCINP PSI)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$.
1) Prouver que la suite (J_n) converge vers 0.
2) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $J_n \sim \dfrac{C}{n}$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 3 : ★(Centrale : Lemme de Cantor)
Soient $I = [a,b]$ et $(a_n), (b_n)$ deux suites de réels telles que: $a_n \cos nx + b_n \sin nx \to 0$ pour tout $x \in I$.
a) Soit un entier naturel n ,montrer qu'il existe un réel θ_n tel que :
$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\cos(nx + \theta_n)$pour tout x de I.
b) Calculer $I_n = \displaystyle\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)^2 dx$.
En déduire que pour n assez grand : $I_n \geq \dfrac{(b-a)}{4}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$.
c) Conclure que (a_n) et (b_n) convergent vers 0.(Lemme de Cantor)

Solution :
a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ puis $z_n = (a_n - ib_n)e^{inx}$. Alors $\boxed{\Re(z_n) = u_n(x)}$ mais en se servant de la décomposition polaire $a_n - ib_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2 e^{i\theta_n}}$, où θ_n est un réel approprié, nous obtenons aussi que $z_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}e^{i(nx\theta_n)}$ soit $\boxed{\Re(z_n) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\cos(nx + \theta_n)}$. Les deux encadrés donnent le résultat.
b) On suppose $n \geq 1$, par linéarité et simple intégration nous avons :
$I_n = \dfrac{b-a}{2}(a_n^2 + b_n^2) + \dfrac{(a_n^2 - b_n^2)(\sin(2nb) - \sin(2na))}{4n} + a_n b_n(\dfrac{\cos(2nb) - \cos(2na)}{2n}$.
De plus, par inégalité triangulaire $|\dfrac{(a_n^2 - b_n^2)(\sin(2nb) - \sin(2na))}{4n}| \leq \dfrac{(a_n^2 + b_n^2)}{2n}$ et $|a_n b_n(\dfrac{\cos(2nb) - \cos(2na)}{2n}| \leq \dfrac{(a_n^2 + b_n^2)}{2n}$.
Ceci entraîne que $I_n \geq \dfrac{b-a}{2}(a_n^2 + b_n^2) - \dfrac{(a_n^2 + b_n^2)}{n} \geq \dfrac{b-a}{4}(a_n^2 + b_n^2)$ dès que $n \geq \dfrac{4}{b-a}$.
c) Supposons que ce ne soit pas vrai; il existe alors un nombre $\alpha > 0$ et une suite strictement croissante $(n_p)_p$ tels que : $\forall p, \sqrt{a_{n_p}^2 + b_{n_p}^2} \geq \alpha$.
Posons alors, pour tout p et tout $x \in I$, $v_p(x) = (\alpha \cos(n_p x + \theta_{n_p}))^2$.
Nous avons $0 \leq v_p(x) \leq (u_{n_p}(x))^2$ donc la suite de fonctions (continues sur I) (v_p) CVS vers la fonction nulle (continue sur I) sur I.
Par ailleurs : pour tout p et tout $x \in I$, $|v_p(x)| \leq (\alpha)^2$. Ce qui montre que la suite de fonctions (v_p) est dominée sur le segment I (toute constante étant intégrable sur un segment).
Le $\boxed{\text{théorème de convergence dominée}}$ stipule alors que $J_p = \displaystyle\int_a^b v_p \to \int_a^b 0 = 0$ si $p \to +\infty$.

la question b) dit aussi que pour p assez grand $I_{n_p} = \dfrac{a_{n_p}^2 + b_{n_p}^2}{\alpha^2} J_p \geq \dfrac{b-a}{4}(a_{n_p}^2 + b_{n_p}^2)$, ce qui après simplification par $a_{n_p}^2 + b_{n_p}^2$ qui est > 0, donne $J_p \geq \dfrac{\alpha^2(b-a)}{4}$. Cette inégalité entre conflit avec la convergence vers 0 de la suite (J_p) obtenue précédemment. Il en résulte, par l'absurde que $\boxed{a_n \to 0 \text{ et } b_n \to 0}$ ■

Exercice 4 : (Mines : Intégration terme à terme)

a) Vérifier que, pour $x > 0, e^{-x}\dfrac{1}{1-e^{-x}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

b) Prouver que, pour tout réel a : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2+n^2}$.

(Pour vérifier la condition de Lebesgue on pourra utiliser : $\forall u, |sin(u)| \leq |u|$.)

Exercice 5 : (CCINP ♡)

Étude d'une suite

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}dt$ converge pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+\cdots+t^n}dt$.

   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel l que l'on déterminera.

   On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé.

Étude de la série de terme général $u_n - l$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   Pour tout entier naturel non nul p, et pour tout réel $t \in [0,1]$, on pose $g_p(t) = (1-t)t^{p(n+1)}$.

   Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{p\geq 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$, et déterminer sa somme.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_p(t)dt$ et en donner un équivalent lorsque p tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - l = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)((n+1)p+1)}.$$

4. Pour tout p entier naturel non nul, on pose $h_p(t) = \dfrac{t^2}{((t+1)p+2)((t+1)p+1)}$.

   Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{p\geq 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
5. En déduire que, pour n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$u_n = l + \frac{\pi^2}{6n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   On admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 6 : (CCINP MP : LEBESGUE ?)

Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit : $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

a) Etablir que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer $\displaystyle\int_0^{\infty} f_n(x)dx$, ce pour tout $n \geq 1$.

Que vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx$?

b) Prouver que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa somme S est intégrable sur cet intervalle.
c) En déduire, sans calculs, la nature de la série $\sum \left(\int_0^\infty |f_n(x)|\,dx \right)$.

Exercice 7 : (X - ENS)
On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n!}$.
1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit pour tout entier naturel m, $x_m = \frac{\pi}{m!}$.
2) Etablir (par minoration et inégalité de convexité) que $\frac{f(x_m)}{x_m} \underset{m\to\infty}{\to} \infty$.
Que peut-on en déduire?
3) Etudier la dérivabilité de f en tout point de $\mathbb{R}$.
Solution :
On posera, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, $u_n(x) = \frac{\sin(n!x)}{n!}$.
1) Chaque u_n est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, $|u_n(x)| = \frac{1}{n!}$.
Comme la série exponentielle $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Le théorème de continuité pour les séries de fonctions peut s'appliquer et donne la continuité de f sur $\mathbb{R}$ puisque cette fonction est la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.
2) Pour tout entier m soit $\Delta_m = \frac{f(x_m) - f(0)}{x_m} = \frac{f(x_m)}{x_m}$.
La fonction sinus s'annulant sur $\pi\mathbb{N}$, nous avons $\Delta_m = \frac{1}{x_m} \sum\limits_{n=0}^{m-1} u_n(x_m)$.
Comme $0 \leq n!x_m \leq \frac{\pi}{m}$, pour $n \in [\![0, m-1]\!]$, il vient, pour $m \geq 2$, $\sin(n!x_m) \geq \frac{2}{\pi} n!x_m$ (inégalité de convexité classique pour le sinus et valable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$) puis $\Delta_m \geq \frac{1}{x_m} \sum\limits_{n=0}^{m-1} \frac{2}{n!\pi} n!x_m = \frac{2m}{\pi}$. Cette minoration assure bien que $\frac{f(x_m)}{x_m} \underset{m\to\infty}{\to} \infty$ et donc que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.
3) Soit N un entier naturel. Toutes les u_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la non dérivabilité (en tout point) de f est équivalente à celle de $g_N = \sum\limits_{n\geq N} u_n$. Cette dernière est impaire et $\frac{2\pi}{N!}$ périodique, il suffit donc de prouver qu'elle n'est dérivable en aucun point de $J =]0, \frac{\pi}{N!}]$. Par le même type d'argumentaire qu'en 2) on montre que g_N n'est pas dérivable en 0 donc, par sa périodicité et son imparité, elle ne l'est pas non plus en $\frac{k\pi}{N!}$, ce pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
De tout ceci on déduit que f n'est dérivable en aucun point du type $r\pi$, où $r \in \mathbb{Q}$ ■

Exercice 8 : (Comparaison série-intégrale)
Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x}$.
Trouver (en s'inspirant du cours et en utilisant, à $x > 0$ fixé, $g_x : t \geq 0 \to \frac{1}{1 + xt^2}$) un équivalent de $f(x)$ pour $x \to 0^+$.
Solution :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x}$. On a vu en cours que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$ donc que f est bien définie sur cet intervalle.
$\boxed{\text{On fixe } x > 0.}$ La décroissance et positivité de g_x conduisent à :
$u_{n+1}(x) = g_x(n+1) \leq \int_n^{n+1} g_x(t)dt \leq g_x(n) = u_n(x)$, ce pour tout entier naturel n.

L'encadrement met en évidence trois termes généraux de STP convergentes(cf préambule) donc en passant aux sommes de ces séries, il vient :

$f(x) - u_0(x) = f(x) - 1 \leq \displaystyle\int_0^{\infty} g_x(t)dt \leq f(x)$. Comme $\displaystyle\int_0^{\infty} g_x(t)dt = \left[\frac{\arctan(\sqrt{x}t)}{\sqrt{x}}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$, nous en tirons l'encadrement suivant $\dfrac{\pi}{2\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \dfrac{\pi}{2\sqrt{x}} + 1$.

Ce qui donne enfin : $\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{2\sqrt{x}}}$ ■