TD 17 Corrigé partiel

Exercice 1 : (Intégrale de Gauss par lui-même)
On considère, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale :$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$.
1) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2) Montrer que g y est dérivable et exprimer g'.
On note : $f(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$.
3) Montrer que $g'(x) = -2f'(x).f(x)$, ce pour tout $x \geq 0$.
4) Intégrant l'expression précédente, exprimer dans le même contexte $g(x)$ à l'aide de $f(x)$.
5) Montrer que $g(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$.
6) En déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-u^2} du$.

Exercice 2 : (Intégrale de Dirichlet : CCINP 2020)
L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1+x^2} e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$$
est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.
3. Soit $x \geq 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) dt.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0, +\infty[$

4. Montrer que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
5. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt.$$

6. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par : $\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)dt$ et $F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)dt$.

7. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.

8. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1) + \cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt.$$

9. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

10. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

Exercice 3 : (Fonction Gamma : Centrale 2016)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$.

1.
   (a) Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction Γ ?

   (b) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.
   En déduire, pour tout $x \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, une expression de $\Gamma(x+n)$ en fonction de x, n et $\Gamma(x)$, ainsi que la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

   (c) Montrer l'existence des deux intégrales $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}dt$ et les exprimer à l'aide de Γ.

2.
   (a) Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a,b]$,

   $$t^x \leqslant \max(t^a, t^b) \leqslant t^a + t^b$$

   (b) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathcal{D}$. Exprimer $\Gamma^{(k)}(x)$, dérivée k-ième de Γ au point x, sous forme d'une intégrale.

3.
   (a) Montrer que Γ' s'annule en un unique réel ξ dont on déterminera la partie entière.

   (b) En déduire les variations de Γ sur $\mathcal{D}$. Préciser en particulier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$. Préciser également les limites de Γ' en 0 et en $+\infty$. Esquisser le graphe de Γ.

SOLUTION:

1.
   (a) L'intégrande, notée f est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Par ailleurs :
   $f(t) = t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ donc $\int_0^1 f(t)dt$ existe $x > 0$.
   Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ donc $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ existe pour tout x.
   Le domaine de définition de Γ est donc $\mathcal{D} =]0,+\infty[$.

(b) On intègre par parties pour $x > 0$: $\Gamma(x+1) = [-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x)$ puisque l'expression entre crochets a pour limite 0 en 0 et en $+\infty$.

On en déduit par récurrence, pour $n \geq 1$ et $x > 0$: $\Gamma(x+n) = \Gamma(x)\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$.

Pour $x = 1$ on obtient avec $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$ donc $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \geq 1$.

(c) Dans la première intégrale on pose $t = u^{1/2}$ (bijection, strictement croissante, de classe C^1 de $]0, +\infty[$ dans lui-même):
$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-u}\frac{1}{2}u^{-1/2}du = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \Gamma(3/2)$.

Dans la seconde intégrale on pose $t = u^{1/4}$ (bijection de classe C^1 de $]0, +\infty[$ dans lui-même):

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^4}dt = \int_0^{+\infty} e^{-u}\frac{1}{4}u^{-3/4}du = \frac{1}{4}\Gamma(1/4) = \Gamma(5/4).$$

2.

(a) Pour $t > 0$ fixé et x variant entre a et b, $e^{x\ln t}$ est compris entre $e^{a\ln t}$ et $e^{b\ln t}$ donc $t^x \leq \max(t^a, t^b) \leq t^a + t^b$.

(b) Pour $x > 0$ et $t > 0$ posons $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t - t}$. On calcule (puisque en fait la fonction est, à $t > 0$ fixé de C^∞ sur $]0, +\infty[$) $\frac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$.

Pour $x > 0$ fixé: $|(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}| \underset{t\to+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ puisque $\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}(\ln t)^k e^{-t} = 0$.

D'autre part $|(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}| \underset{t\to 0}{\sim} |\ln t|^k t^{x/2}\frac{1}{t^{1-x/2}} \underset{t\to 0}{=} o(\frac{1}{t^{1-x/2}})$ qui est intégrable sur $]0, 1]$ puisque $x > 0$. On en déduit que $t \mapsto \frac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On peut ainsi appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral:

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ (Comme déjà remarqué).
- Pour tout $x > 0$ $t \to f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf Q1).
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$ il existe φ intégrable sur $]0, +\infty[$ telle $\left|\frac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$: en appliquant ce qui précède on peut prendre $\varphi(t) = \left|\frac{\partial f^k}{\partial x^k}(a,t)\right| + \left|\frac{\partial f^k}{\partial x^k}(b,t)\right|$.(Domination sur tout segment des dérivées partielles à tout ordre).

On en conclut pour $x > 0$: $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}dt$.

3.

(a) Puisque $(\ln t)^2 > 0$ pour $t \neq 1$, on a $\Gamma''(x) > 0$ et donc Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On pourra remarquer que Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
Avec $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ on déduit que $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. On peut appliquer le théorème de Rolle à Γ sur $[1, 2]$ puisqu'elle est de classe C^1 et que $\Gamma(1) = \Gamma(2)$. On en déduit que Γ' s'annule sur $]1, 2[$, une seule fois puisque Γ' est strictement croissante. Il existe un unique ξ tel que $\Gamma'(\xi) = 0$ et sa partie entière est égale à 1.

(b) Pour $0 < x < \xi$, $\Gamma'(x) < 0$ donc Γ est strictement décroissante. Pour $x > \xi$, $\Gamma'(x) > 0$ donc Γ est strictement croissante.
De $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et de $\Gamma(1) = 1$ on déduit par continuité de Γ en 1 que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0^+ et par suite Γ a pour limite $+\infty$ en 0^+.

Puisque Γ est croissante pour $x > 2$ et que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ on déduit que Γ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
De $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ on déduit $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$. Par continuité de Γ' en 1 et avec l'équivalent obtenu pour $\Gamma(x)$ en 0^+ on déduit que $\Gamma'(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$, donc Γ' a pour limite $-\infty$ en 0^+.
Pour $x > \xi$ on a $\Gamma'(x) > 0$ et par suite $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x) > \Gamma(x)$: on en déduit que Γ' a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

(c) La courbe représentative de Γ a pour asymptote la droite d'équation $x = 0$. Quand x tend vers $+\infty$ la croissance vers $+\infty$ est très rapide puisque $n!$ croît très vite vers $+\infty$; la convexité de son graphe fait que son allure (celle du graphe) ressemble à une parabole à branches asymptotiques très accentuées■

Exercice 4 : (Une transformée de Fourier : Centrale 2016)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{-3/4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} dt$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

(a) Montrer que la fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & F(x) \end{array}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Soit k un entier naturel non nul et soit x un réel. Donner une expression intégrale de $F^{(k)}(x)$, dérivée k-ième de F en x. Préciser $F(0)$.

(b) Prouver que F vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle de la forme $F' + AF = 0$, où A est une fonction à préciser.

(c) En déduire une expression de $F(x)$.

On pourra commencer par dériver la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{8}\ln(1+x^2) + \dfrac{\mathrm{i}}{4}\arctan x$.