Evn : Exercices et preuves du cours
PC* Lycée Bellevue 2024/2025

On donne dans ce document des démonstrations (non faites en cours) de certains résultats et on s'intèresse à des exercices (dont quelques uns) ont été proposés en cours.
J'ai essayé de respecter la chronologie.
Le symbole ⚠ désigne un exercice technique ou une preuve un peu délicate et qu'on peut laisser en première lecture.
Le symbole ♡ désigne un exercice dont la recherche ou le résultat apporte quelquechose.
Il est conseillé de faire des dessins dans le plan usuel pour aider son intuition.
Dans ce qui suit on se place dans un espace vectoriel normé quelconque $(E, \|.\|)$.

Fermés et Ouverts

Exercice 1 *(Caractérisation des parties ouvertes et fermées de E)*⚠
Les seules parties ouvertes et fermées de E sont E et $\emptyset$.

Solution : 1 *Par définition E et $\emptyset$ sont ouverts et fermés.*
Montrons par l'absurde qu'il n'existe aucune autre partie de E ayant cette particularité.
Notons F une partie de E qui soit à la fois ouverte et fermée telle que $F \neq E$ et $F \neq \emptyset$. On notera G le complémentaire de F dans E. On a donc F et G non vides, il est donc possible de considérer $a \in F$ et $b \in G$.
On désigne alors par $X = \{t \in [0,1], (1-t)a + tb \in F\}$.
X est une partie de $\mathbb{R}$ non vide ($0 \in X$ car $a \in F$) et majorée. Elle possède donc une borne supérieure notée α ; celle-ci appartient à $[0,1]$, elle est limite d'une suite (t_n) à valeurs dans X. On a donc la suite à termes dans F $(1-t_n)a + t_n b)$ qui converge vers $c = (1-\alpha)a + \alpha b$. Comme F est fermé, cette limite appartient à F. Bilan 1 : $c \in F$.
Nous allons montrer que c appartient aussi à G ce qui donnera la contradiction voulue puisque F et G sont disjoints.
A priori $c \notin G$ donc $c \neq b$ et ainsi $\alpha \in [0,1[$ et la suite $(u_n = \alpha + 1/n)$ est à termes dans $[0,1]$ APCR et chaque u_n est strictement supérieur à $\alpha = \sup(X)$; il en résulte que (APCR) $(1-u_n)a + u_n b \notin F$ donc que la suite $((1-u_n)a + u_n b)$ est (APCR) à termes dans G et on voit aisément qu'elle converge aussi vers c. Mais G est fermé puisque F est ouvert donc $c \in G$■

Intérieur

Proposition 1 *(Caractérisation géométrique des ouverts)*
Soit $U \subset E$.
U est une partie ouverte de $E \iff U \subset \mathring{\hat{U}}$.

Preuve : 1 *On note $F = E \setminus U$.*
$\Longrightarrow$
Soit $x \in U$ et supposons que $x \notin \overset{\circ}{\widehat{U}}$.
Alors : $\forall n \geq 1, B(x, 1/n)$ n'est pas inclus dans U et il existe donc un $x_n \in F$ tel que $\|x - x_n\| \leq 1/n$.
On dispose donc d'une suite (x_n) à termes dans F, convergeant vers x. Or U est ouvert donc F est fermé et x doit appartenir à F ; ce qui est absurde$\square$
$\Longleftarrow$.
Nous montrons que F est fermé en prenant une suite (y_n) à termes dans F, convergeant vers y et en montrant que $y \in F$.
Soit $r > 0$, par définition de la convergence de (y_n) vers y, il existe un entier m tel que $\|y - y_m\| < r$ donc $B(y, r)$ n'est pas inclus dans U, ce pour tout $r > 0$. Autrement dit $y \notin U$ soit $y \in F$ $\blacksquare$

Exercice 2 *(L'intérieur d'une partie est un ouvert)*
Soit $A \subset E$ alors $\overset{\circ}{\widehat{A}}$ est un ouvert de E.

Solution : 2 *Reprendre $\Longleftarrow$ de la preuve précédente.*

Adhérence

Exercice 3 *(L'adhérence d'une partie est un fermé)*
Soit $A \subset E$ alors $\overline{A}$ est un fermé de E.

Solution : 3 *On montre (avec la caractérisation géométrique des ouverts) que $U = E \setminus \overline{A}$ est un ouvert.*
Soit $x \in U$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \emptyset$ (par définition d'un point adhérent).
Ce qui montre que $B(x, r) \subset A$ donc que $x \in \overset{\circ}{\widehat{U}}$ $\blacksquare$

Exercices supplémentaires

Exercice 4 *(Intérieur d'un sev d'un evn)*$\heartsuit$
Soit $F \neq E$ un sev de E alors $\overset{\circ}{\widehat{F}} = \emptyset$.

Solution : 4 *On prouve la contraposée.*
Puisque on suppose l'intérieur de F non vide, on en considère un élément que l'on note a et on peut trouver $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset F$.
Prenons $x \neq a$ quelconque dans E (avec comme objectif de montrer qu'il est dans F, c'est déjà le cas pour a) alors (puisque $\left\| \dfrac{r}{2\|x - a\|}.(x - a) \right\| < r$) $y = \dfrac{r}{2\|x - a\|}.(x - a) \in F$ donc, par stabilité CL pour F, $a + \dfrac{2\|x - a\|}{r}.y = x$ appartient (comme voulu) à F $\blacksquare$

Exercice 5 *(Adhérence d'un sev d'un evn)*$\heartsuit$
Soit F un sev de E alors $\overline{F}$ est un sev de E.

Solution : 5 *$\overline{F}$ est, par définition, une partie de E.*
$\overline{F}$ contient F et $0_E \in F$ donc $\overline{F} \neq \emptyset$.
Soit $(a, b, \lambda) \in (\overline{F})^2 \times \mathbb{K}$, il existe donc deux suite à termes dans F (a_n) et (b_n) convergeant respectivement vers a et b. Par opérations sur les limites la suite $(c_n = a_n + \lambda b_n)$ converge vers $a + \lambda b$ et (F étant un sev) est à termes dans F ; ce qui montre que $a + \lambda b \in \overline{F}$ $\blacksquare$

Voici pour finir un joli complément.

Exercice 6 $\heartsuit$
Tout sev de dimension finie de E est un fermé.

Solution : 6 *Notons F un sev de E qui soit de dimension finie et considérons une suite (x_n) à termes dans F convergeant vers $x \in E$. Si $x \in F$ c'est fini*$\square$
Supposons le contraire et posons $H = F \oplus Vect(x)$. On considère $(e_1, ..., e_p)$ une base de F que l'on complète avec x pour obtenir une base de H que nous notons b. Pour chaque n la composante suivant x dans b de x_n est nulle donc par passage à la limite celle de la limite de la suite (x_n) aura cette même caractéristique ; c'est évidemment absurde$\blacksquare$

Ce résultat dépend de la norme en général. Prenons $E = C^0([0,1])$ et $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.
Première situation : on munit E de la norme infinie sur $[0,1]$ (norme de la convergence uniforme donc). La CVU impliquant la CVS, F est alors un fermé de E.
Deuxième contexte : on considère la norme "1" et on définit pour $n \geq 1$ la fonction f_n telle que $f_n(x) = 1$ si $x \in]1/n, 1]$ et $f_n(x) = nx$ si $x \in [0, 1/n]$. Un simple graphe montre que la suite (f_n) est à termes dans F et qu'elle converge vers la fonction constante 1 dans ce nouveau contexte ($\int_0^1 |f_n - 1| \leq 1/n$) et celle-ci n'appartient pas à F. F n'est donc plus fermé ici.