Corrigé du DS3 (4h) : Option CCINP

• La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés.
• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert et bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

1 Algèbre Linéaire

Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonnes.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.
  On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !

Objectifs

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés spectrales de deux matrices $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ introduites par Mark Kac au milieu du XX^e siècle. Ces liens ont été mis en évidence par Alan Edelman et Eric Kostlan au début des années 2000.

Cet exercice est divisé en trois parties largement indépendantes. La **Partie I** introduit les matrices de Kac en taille 3 et met en évidence les propriétés qui seront démontrées en taille quelconque dans les **Parties II** et **III**.

Partie I - La dimension 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q1. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(XI_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
Solution :
Avec les manips suivantes : $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ suivie de la factorisation par λ sur la première ligne puis $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ et développement suivant la première ligne, on trouve $\chi_A = \lambda(\lambda^2 - 4)$.
Ainsi $\boxed{\chi_A = X(X-2)(X+2)}$ ■

Q2. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.*
Solution :
Le calcul précédent montre que le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples.
Par condition suffisante de diagonalisabilité, A est diagonalisable et $Sp(A) = \{0, -2, 2\}$.
Chaque espace propre est de dimension 1 puisque chaque valeur propre est simple■

Q3. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.
Solution :
Un calcul similaire à celui effectué en Q1 donne $\boxed{\chi_B = X(X^2+4) = X(X-2i)(X+2i)}$. De plus $i\chi_B(iX) = i(iX)(-X^2+4) = X(X^2-4) = \chi_A(X)$■

Q4. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.*
Solution :
B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ puisque son polynôme caractéristique (cf Q3) n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, en revanche par le même argument qu'en Q2 elle l'est sur $\mathbb{C}$.
Son spectre réel est $\{0\}$, son spectre complexe est $\{0, -2i, 2i\}$.
Quelque soit le cas de figure, tous les sous-espaces propres sont de dimension 1■

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \ / \ (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

Q5. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.
Solution :
On se donne $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$.

Ainsi pour tout réel de $]0, \pi[$ (en factorisant par $(\sin(x))^n \neq 0$), il vient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (\cot(x))^k = 0$.

Par conséquent le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul et tous ses coefficients le sont aussi soit $\forall k \in [\![0, n]\!], \lambda_k = 0$ et la liberté de $(f_0, ..., f_n)$ est vérifiée□
Dès lors la dimension du sev engendré par cette famille est le cardinal de cette dernière d'où $\boxed{\dim(V_n) = n+1}$■

Q6. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f_k' \in V_n$. En déduire que :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_n : & V_n & \longrightarrow & V_n \\ & f & \longmapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Solution :
Un calcul direct montre que, pour $k \in [\![0,n]\!]$, $f_k' = -kf_{k-1} + (n-k)f_{k+1} \in V_n$.
La linéarité de la dérivation et la vérification précédente prouvent que $\phi_n \in L(V_n)$.
Le calcul du début donne immédiatement la matrice souhaitée■
Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.

Q7. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$.
Solution :
Pour tout réel x et tout $k \in [\![0,n]\!]$, $g_k(x) = (e^{ix})^k (e^{-ix})^{n-k}$■

Q8. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall\ k \in [\![0,n]\!], \quad g_k \in V_n$.
Solution :
Dans le même contexte que précédemment :
$g_k(x) = (\sum_{p=0}^{k} i^{k-p} \binom{k}{p} (\cos(x))^p (\sin(x))^{k-p})(\sum_{q=0}^{n-k} (-i)^{n-k-q} \binom{n-k}{q} (\cos(x))^q (\sin(x))^{n-k-q})$, ce avec le binôme de Newton.
Donc $g_k(x) = \sum_{(p,q)\in[\![0,k]\!]\times[\![0,n-k]\!]} (-1)^{n-k-q} (i)^{n-(p+q)} \binom{k}{p} \binom{n-k}{q} f_{p+q}(x)$.
Il en résulte bien que $g_k \in V_n$■

Q9. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, calculer g_k'. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.
Solution :
Pour $k \in [\![0,n]\!]$, $\phi_n(g_k) = g_k' = i(2k-n)g_k$ donc (puisque g_k n'est pas la fonction nulle) $i(2k-n) \in Sp(\phi_n)$. On dispose donc de $n+1 = \dim(V_n)$ valeurs propres distinctes pour ϕ_n, il en résulte que le polynôme caractéristique de ϕ_n est scindé à racines simples donc que ϕ_n est bien diagonalisable et que $Sp(\phi_n) = \{i(2k-n), k \in [\![0,n]\!]\}$.
Pour chaque $k \in [\![0,n]\!]$, l'espace propre associé à $i(2k-n)$ est une droite vectorielle et , compte tenu du début de cette réponse, il s'agit de $Vect(g_k)$■

Q10. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?
Solution :
φ_n est un automorphisme de V_n si et seulement si 0 n'est pas dans son spectre donc si et seulement si $\boxed{n \text{ est impair}}$■

Q11. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$ et en déduire que :

$$\ker(B_n - inI_{n+1}) = \text{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k}\binom{n}{k}$.
Solution :
On se sert de la formule obtenue en Q8 pour $k = n$, ce qui donne :
$g_n = \sum_{p=0}^{n} (i)^{n-p} \binom{n}{p} f_p$.
La réponse en découle immédiatement■

Partie III - Les matrices de Kac de taille $n+1$

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice A_n, On utilise les résultats de la **Partie II** pour étudier les propriétés spectrales de la matrice A_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général $a_{k,l}$ de la matrice A_n vérifie donc :

- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $a_{k,k-1} = n - k + 2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,
- $a_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k,l) \in [\![1, n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k-ième terme diagonal d_{kk} vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

Q12. Soient $M = (m_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $D = (d_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p. Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des m_{kl} et des d_{kl}, puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des m_{kl} et des d_{kl}.
Solution :
Pour les indices déclarés par l'énoncé $DM_{kl} = d_{kk}m_{kl}$ et $MD_{kl} = m_{kl}d_{ll}$ ■

Q13. Montrer que $D_n^{-1}A_nD_n = -iB_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la **Partie II**. En déduire une relation simple entre $\chi_{A_n}(X)$ et $\chi_{B_n}(iX)$, où χ_{A_n} et χ_{B_n} sont les polynômes caractéristiques respectifs de A_n et B_n.
Solution :
La question précédente montre que le coefficient d'indice k,l de $D_n^{-1}A_nD_n$ est $i^{1-k}a_{kl}i^{l-1} = i^{l-k}a_{kl}$. Donc pour $l = k+1$ notre coefficient vaut ik et pour $l = k-1$ il vaut $-i(n-k+2)$ et dans tous les autres cas il est nul.
On a donc bien $D_n^{-1}A_nD_n = -iB_n$.
Le polynôme caractéristique étant un invariant de similitude, on a $\chi_{A_n}(X) = \det(X + iB_n) = i^{-n-1}\det(iX - B_n)$ soit finalement $\chi_{A_n}(X) = i^{-n-1}\chi_{B_n}(iX)$. On retrouve pour $n = 2$ le résultat de la partie I■

Q14. En déduire, à l'aide de la **Partie II**, que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k - n$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et que :

$$\ker(A_n - nI_{n+1}) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $p_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.
Solution :
De la question précédente on déduit que χ_{A_n} possède $n+1$ racines simples (cf fin partie II) les $\dfrac{i(2k-n)}{i} = 2k - n$, ce pour $k \in [\![0, n]\!]$. Etant donc scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, A_n est diagonalisable.

On pose $Y = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$.

Alors $A_nY = -iD_nB_n(D_n^{-1}Y)$ et $D_n^{-1}Y = \begin{pmatrix} p_0 \\ i^{-1}p_1 \\ \vdots \\ i^{-n}p_n \end{pmatrix} = i^{-n}Z$.

Mais Z colonne propre de B_n de vp in donc $A_nY = -i^{1-n}D_n(inZ) = ni^{-n}D_n(Z)$.
Comme $D_n(Z) = i^nY$, nous obtenons $A_nY = nY$ et sachant que Y n'est pas la colonne nulle et que chaque espace propre de A_n est de dimension 1, on a bien $\ker(A_n - nI_{n+1}) = Vect(Y)$■

2 Analyse

Dans cet exercice, on détermine la valeur de la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal.
Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin(t)dt \text{ et } H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(t)dt.$$

Q1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |\sin(t)| \leq t$.

Q2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

Q3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

Q4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.

Q5. Trouver une expression simple pour G et pour H. *On pourra calculer* $H(x) + iG(x)$.

En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)dt$.

Q6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

Solution ;
Q1. Application classique (cf première année) de l'inégalité des accroissements finis■
Q2. On fixe le réel $x > 0$. Les trois intégrandes sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ pour la première et sur $\mathbb{R}_+$ pour les deux autres et sont dominées toutes les trois sur leur intervalle de définition par $t \to e^{-tx}$, ce qui montre l'existence de nos trois intégrales généralisées puisque $\int_0^{+\infty} e^{-tx}dt$ est notoirement convergente■
Q3. On a donc pour tout $x > 0$ (Inégalité triangulaire + Q1) : $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = \frac{1}{x}$. Le théorème des gendarmes permet de conclure aisément■
Q4. On va bien sûr utiliser la règle de Leibniz pour dériver sous le signe intégral.
On constate d'abord que :
•$\forall t > 0, x \to \frac{\sin(t)}{t}e^{-tx}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (exp l'étant elle-même).
•$\forall x > 0, t > 0 \to \frac{\sin(t)}{t}e^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf Q2).
• $\forall x > 0, t \to \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\sin(t)}{t}e^{-tx}) = -\sin(t)e^{-tx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc y est continue par morceaux□
On procède ensuite à la domination (sur tout segment ici de la dérivée partielle de l'intégrande suivant le paramètre.
Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$, $x \in [a, b]$ alors :
$\forall t > 0, |-\sin(t)e^{-tx}| \leq e^{-at}$ et $t \to e^{-at}$ est bien positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$□
Nous pouvons appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral à F.
Ainsi F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\boxed{\forall x > 0, F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin(t)dt = -G(x)}$■

Q5. On a facilement (et pour tout réel $x > 0$) $H(x) + iG(x) = \dfrac{1}{x-i} = \dfrac{x+i}{x^2+1}$ d'où $\boxed{G(x) = \dfrac{1}{x^2+1}}$ et $\boxed{H(x) = \dfrac{x}{x^2+1}}$ □

Le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{\alpha}$ donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)dt = \frac{H(x/\alpha)}{\alpha} = \boxed{\frac{\alpha^2}{x^2+\alpha^2}}$ ■

Q6 Les deux questions précédentes justifient l'existence d'un réel C tel que :
$\forall x > 0, F(x) = C - \arctan(x)$.
Sachant que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, il vient $C = \dfrac{\pi}{2}$.
En conclusion $\boxed{\forall x > 0, F(x) = \arctan(\frac{1}{x})}$ et $\boxed{F(1) = \frac{\pi}{2}}$ ■

3 Partie Centrale

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geq p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n\geq p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq p} u_n$.
Si la suite $(P_n)_{n\geq p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} P_n.$$

3.1 Résultats préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

1. Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right) - 1\right| \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right) - 1.$$

Solution :
Posons $A_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) - 1$ et $B_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|) - 1$ et montrons l'inégalité proposée par récurrence sur n.
Pour $n = 1$ l'inégalité se résume à $|x_1| \leq |x_1|$.
Supposons la établie au rang n et partons de $|A_{n+1} = A_n + x_{n+1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)|$. Par inégalités triangulaires puis par HR $|A_{n+1}| \leq |A_n| + |x_{n+1}|\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|) \leq |B_n| + |x_{n+1}|\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|) = B_{n+1}$. La récurrence se poursuit bien. ■

2. Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Solution :
Par inégalité de convexité usuelle $1 + x_k \leq e^{x_k}$, ce pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Les deux membres de cette

inégalité générique étant positifs, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{x_k} = e^{(\sum_{k=1}^{n} x_k)}$ ■

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^z.

3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,
$$|(1+t) - \mathrm{e}^t| \leqslant |t|^2 \mathrm{e}^{|t|}$$

Solution :
On sait que $e^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ donc $|e^t - 1 - t| \leq \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!}$ (inégalité triangulaire impliquant la somme d'une série ACV) soit enfin (changement d'indice) $|e^t - 1 - t| \leq |t|^2 \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|t|^m}{(m+2)!} \leq |t|^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|t|^m}{m!} = |t|^2 e^{|t|}$ ■

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.
Montrer que $|a^n - b^n| \leq nM^{n-1}|a - b|$.
Solution :
On connaît l'identité algébrique $a^n - b^n = (a-b)(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k})$ donc par inégalité triangulaire (encore !) il vient :
$|a^n - b^n| \leq |a-b|(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a|^k |b|^{n-1-k}) \leq |a-b| n M^{n-1}$ ■

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left|\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leq \dfrac{|z|^2}{n} \mathrm{e}^{|z|}$.
Solution :
En fixant $n \in N^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on applique 4. à $a = 1 + z/n$ et $b = e^{z/n}$.
En remarquant que $|a| \leq 1 + |z/n| \leq e^{|z/n|}$ et $|b| = \exp(\Re(z)/n) \leq e^{|z/n|}$ donc que $M \leq e^{|z/n|}$, ce qui donne $\left|\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leq n e^{\frac{(n-1)|z|}{n}} |1 + z/n - e^{z/n}| \leq n e^{\frac{(n-1)|z|}{n}} \dfrac{|z|^2}{n^2} e^{\frac{|z|}{n}}$ avec l'inégalité obtenue en 3.
Soit enfin l'inégalité désirée ■

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers e^z.
Solution :
?? ■

3.2 Etude d'une fonction définie par un produit infini

On considère dans cette partie :

- a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a, b]$.
- $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $]-1, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x)), \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|), \quad \text{et sous conditions d'existence } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|.$$

On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathcal{S}$ et que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction R_0.

7. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leq \mathrm{e}^M |f_{n+1}(x)|.$$

Solution :
La convergence uniforme sur $\mathcal{S}$ de la série de fonctions continues (sur $\mathcal{S}$) $\sum\limits_{n\geq 1} |f_n|$ assure la continuité de R_0 sur $\mathcal{S}$ donc l'existence d'un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{S}$ on ait $R_0(x) \leq M$.
Soient $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{S}$, comme en utilisant 2. $Q_{n+1}(x) - Q_n(x) = Q_n(x)|f_{n+1}(x)| \leq \exp(\sum\limits_{k=1}^{n} |f_k(x)|)|f_{n+1}(x)|$, on dispose a fortiori de l'inégalité $Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leq \exp(R_0(x))|f_{n+1}(x)| \leq \mathrm{e}^M |f_{n+1}(x)|$ ■

8. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq Q_{n+1}(x) - Q_n(x).$$

Solution :
Dans le contexte de la question $|P_{n+1}(x) - P_n(x)| = |P_n(x)||f_{n+1}(x)| \leq Q_n(x)|f_{n+1}(x)| = Q_{n+1}(x) - Q_n(x)$ ■

9. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction P définie sur $\mathcal{S}$ par :

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) \end{cases}$$

Solution :
Fixons d'abord $x \in \mathcal{S}$ par principe de comparaison l'utilisation des deux questions précédentes montre que la série de terme général $P_{n+1}(x) - P_n(x)$ est ACV donc CV; le lien suite-série implique alors que la suite $(P_n(x))$ converge. Par définition du produit infini la limite de cette suite est $P(x)$. Il en résulte que $\boxed{\text{la suite de fonctions } (P_n) \text{ CVS vers } P \text{ sur } \mathcal{S}}$□
Etablissons que cette CVS est en fait uniforme en fixant $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{S}$.
En utilisant 8., on a $\sum\limits_{k=n}^{k=n+p} |P_{k+1}(x) - P_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n}^{k=n+p} (Q_{k+1}(x) - Q_k(x))$, ce pour tout entier naturel p.
Soit (inégalité triangulaire , télescopage et 7.): $|P_{n+p+1} - P_n(x)| \leq e^M (\sum\limits_{k=n}^{k=n+p} |f_{n+1}(x)|)$.
En faisant enfin tendre p vers $+\infty$, il vient par conservation des inégalités à la limite :
$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{S}$, $|P(x) - P_n(x)| \leq e^M R_n(x) \leq e^M \|R_n\|_\infty^{\mathcal{S}} = \alpha_n$.
La CVU sur $\mathcal{S}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} |f_n|$ donne que la suite (α_n) converge vers 0, ce qui avec l'inégalité précédente traduit la $\boxed{\text{CVU de la suite de fonctions } (P_n) \text{ sur } \mathcal{S} \text{ vers la fonction } P}$ ■

10. Montrer que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.
Solution :
La continuité sur $\mathcal{S}$ de toutes les f_k fait que chaque P_n est continue sur $\mathcal{S}$, la CVU prouvée précédemment et le théorème C^0 pour les suites de fonctions garantissent la continuité de P sur $\mathcal{S}$□
Soit $x \in \mathcal{S}$, pour tout $n \geq 1$, $f_n(x) + 1 > 0$; on peut donc considérer $u_n = \ln(1 + f_n(x))$ et on a $|u_n| \sim |f_n(x)|$ ainsi $\sum\limits_{n\geq 1}$ est une série convergente dont la somme $T(x)$ est un réel. Ce que l'on peut traduire en disant que $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \to T(x)$ si $n \to +\infty$ ou encore que la suite $(\ln(P_n(x))$ converge vers le réel $T(x)$ soit, par composition, que $(P_n(x))$ converge vers $e^{T(x)} > 0$ donc $P > 0$ ■

3.3 Généralités

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - e^{-nx^2}\right)$.

11. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.
Solution :
Il s'agit d'un cas particulier de la situation précédente appliquée à tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ d'où la continuité de f sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ donc sur cet intervalle (en effet la série la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ CVN sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ et même sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$, où $a > 0$) ■

12. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^\star$ puis calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
Solution :
On a pour $0 < x < y$, $0 < 1 - e^{-nx^2} < 1 - e^{-ny^2}$, ce pour tout $n \in N^*$ donc $P_n(x) \leq P_n(y)$ puis par conservation des inégalités à la limite $f(x) \leq f(y)$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
Pour tout $x > 0$, $0 < f(x) \leq 1 - e - x^2$ donc en faisant tendre x vers 0, on trouve (gendarmes) $f(x) \to 0$.
Pour des raisons analogues à celles données dans la réponse à la question précédente la fonction $g : x > 0 \to \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + e^{-nx^2}\right)$ et en utilisant la question 1. (avec un passage à la limite) on récupère l'inégalité $(\star)|f(x) - 1| \leq g(x) - 1$ Par ailleurs g est décroissante, minorée par 1 et f est croissante et majorée par 1 et > 0; ces deux fonctions ont donc des limites finies et strictement positives en $+\infty$ que l'on note respectivement L' et L.
On peut remarquer que $f(x)g(x) = f(\sqrt{2}x)$ donc en passant à la limite, on tire $L'L = L'$ d'où $L = 1$ ($L' \neq 0$) puis en passant à la limite dans $(\star)$, on finit par trouver $\boxed{L = 1}$(Il y a sûrement plus simple) ■

On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ telle que :

- la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} |f_n]$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.
- la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{f_n'}{1 + f_n}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathcal{S}$,
$$P_n'(x) = P_n(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{1 + f_k(x)}.$$
Solution :
Simple dérivation logarithmique ■

14. En déduire que la fonction
$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) \end{cases}$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ et que
$$\forall x \in \mathcal{S},\ \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}$$
Solution :
On va appliquer à la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$, où on a posé $g_n = \ln(1 + f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème de dérivation terme à terme.
On observe à cette fin :
i) $\forall n \geq 1$, g_n est de classe C^1 sur $\mathcal{S}$.

ii) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ CVS sur $\mathcal{S}$ (Voir Réponse à 10.).

iii) Comme $g'n = \dfrac{f_n'}{1+f_n}$, la série $\sum_{n\geq 1} g_n'$ CVU sur $\mathcal{S}$.

On peut donc affirmer que $T = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ est classe C^1 sur $\mathcal{S}$ et (cf Réponse à 10.) puisque $P = e^T$, P est de même régularité.

Par dérivation terme à terme et pour tout $x \in \mathcal{S}$: $T'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}$, comme $T = \ln(P)$, cette formule équivaut à celle demandée ■

3.4 Expression de la fonction sinus comme produit infini

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right).$$

Dans les quatre questions suivantes, on fixe un entier naturel n.

15. Montrer que P_n est un polynôme de degré $2n+1$.
Solution :
En tant que CL de polynômes de degré $2n+1$, P_n est un polynômes de degré $\leq 2n+1$. On localise le coefficient du terme de ce degré et on trouve $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}} \neq 0$ donc $\deg(P_n) = 2n+1$ ■

16. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $x_k = (2n+1)\tan\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$. Montrer que l'ensemble des racines de P_n est $\{x_k \,|\, k \in [\![0, 2n]\!]\}$.
Solution :
On pose $J = [0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi[$ Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$,on pose $\theta_k = \dfrac{k\pi}{2n+1} \in J$; alors $2iP_n(x_k) = (1+i\tan(\theta_k))^{2n+1} - (1+i\tan(\theta_k))^{2n+1}$ soit $2i(\cos(\theta_k))^{2n+1}P_n(x_k) = (e^{i\theta_k})^{2n+1} - (e^{-i\theta_k})^{2n+1}$. Puis avec Moivre $2i(\cos(\theta_k))^{2n+1}P_n(x_k) = e^{ik\pi} - e^{-ik\pi} = (-1)^k - (-1)^k = 0$ d'où $P_n(x_k) = 0$ puisque $\cos(\theta_k) \neq 0$. Les θ_k formant une suite finie strictement croissante de $[0, \pi/2[$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et aussi de $]\pi/2, \pi[$ pour les autres indices on dispose (par stricte croissance de tan sur chaque intervalle) des inégalités $x_{n+1} < ... < x_{2n} < x_0 = 0 < ..... < x_n$ donc de $2n+1$ racines deux à deux distinctes pour P_n dont le degré vaut $2n+1$. Nous avons ainsi déterminer toutes les racines de P_n, à savoir les x_k, où k varie dans $[\![0, 2n]\!]$ ■

17. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$P_n(X) = \lambda X \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right).$$

Solution :
Ayant déterminer toutes les racines de P_n, on peut factoriser P_n comme suit :
$P_n = \mu \prod_{k=0}^{2n}(X - x_k)$, où $\mu \in \mathbb{C}^*$. Or $x_0 = 0$ et $x_{2n+1-k} = -x_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ ($\tan(\pi - x) = -\tan(x)$!!)
donc la factorisation devient $P_n = \mu X \prod_{k=1}^{n}(X^2 - x_k^2) = \lambda X \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \dfrac{X^2}{x_j^2}\right)$ avec $\lambda = (-1)^n \mu (\prod_{k=1}^{n} x^k)^2$ ■

18. En calculant $P_n'(0)$, montrer que :

$$P_n(X) = X \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right).$$

Solution :
Comme $P_n(0)=0$, $P_n'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{P_n(x)}{x}=\lambda$ avec l'expression obtenue en 18.
Mais on peut déterminer cette dérivée en 0 avec la définition de P_n, il s'agit du coefficient du terme en X. Avec le binôme de Newton on trouve $\dfrac{1}{2i}\times 2i\binom{2n+1}{1}\dfrac{1}{2n+1}=1$ ■

19. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sinus.
Solution :
Grâce au résultat de 6., nous avons, pour tout réel x, $P_n(x)\to\dfrac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})=\sin(x)$ si $n\to+\infty$ d'où le résultat ■
Dans cette sous-partie, on fixe un réel x et on considère la suite de fonctions $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall k\in\mathbb{N}^\star,\ v_k:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\left\{\begin{array}{ll}x\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{\left(\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor+1}\right)(2\lfloor t\rfloor+1)\right)^2}\right) & \text{si } t\geq k\\ P_{\lfloor t\rfloor}(x) & \text{si } t<k.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

20. Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geq 2$,

$$|v_k(t)-v_{k-1}(t)|\leq\frac{x^2}{k^2\pi^2}|v_{k-1}(t)|.$$

Solution :
Pour $k\geq 2$ et $t\geq 0$, posons $w_k=|v_k(t)-v_{k-1}(t)|$ et $m=\lfloor t\rfloor$.
Premier cas : $t\geq k(\geq k-1)$ alors $w_k=x^2|v_{k-1}(t)|\dfrac{1}{(2m+1)\tan(\frac{k\pi}{2m+1})}$ mais sachant que $\tan(u)\geq u$ pour $u\in[0,\pi/2[$, on a $w_k\leq x^2|v_{k-1}(t)|\dfrac{1}{k^2\pi^2}$.
Deuxième cas $t\in[k-1,k[$ comme $m=k-1$, $w_k=0\leq x^2|v_{k-1}(t)|\dfrac{1}{k^2\pi^2}$.
Troisième cas $t<k-1<k$ idem au second cas ■

21. Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et $k\in\mathbb{N}^\star$,

$$|v_k(t)|\leq|x|\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

Solution :
La question précédente et l'inégalité triangulaire inverse donne (même contexte) :
$|v_k(t)|\leq(1+\dfrac{x^2}{k^2\pi^2})|v_{k-1}(t)|$.
Ceci entraîne $|v_k(t)|\leq\displaystyle\prod_{j=2}^{k}(1+\frac{x^2}{j^2\pi^2})|v_1(t)|\leq\exp x^2(\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j^2\pi^2})$ (en utilisant 2.)
Comme $|v_1(t)|\leq|x|$, on a ce que l'on veut ■

22. En déduire que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 2}(v_k-v_{k-1})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
Solution :
En combinant les deux questions précédentes, on a la CVN sur $\mathbb{R}_+$ de cette série de fonctions ■

23. Calculer, pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$, $\lim_{t\to+\infty}v_k(t)$ et, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $\lim_{k\to+\infty}v_k(t)$.
Solution :

D'abord on fixe k et on fait tendre t vers $+\infty$ donc $v_k(t) = x \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{x^2}{\left(\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right)(2\lfloor t \rfloor + 1)\right)^2} \right) \to$ $x \prod_{j=1}^{k} (1 - \frac{x^2}{j^2\pi^2})$.
En renversant le protocole précédent la limite vaut cette fois $P_{\lfloor t \rfloor}(x)$ ■

24. En déduire que :

$$\sin(x) = x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right).$$

Solution :
On peut appliquer le théorème de la double limite à la série de fonction $\sum_{k \geq 2} (v_k - v_{k-1})$ pour $t \to +\infty$, ce grâce aux informations acquises en 22. et 23. .
On pose, pour $k \geq 2$, $t_k = x \prod_{j=1}^{k} (1 - \frac{x^2}{j^2\pi^2})$.
En notant V la somme de notre série de fonctions, il vient $\lim_{t \to +\infty} V(t) = \sum_{k=2}^{\infty} (t_k - t_{k-1})$, où est sous-entendue la convergence de la série dont la somme est manipulée sans vergogne.
On a donc $\lim_{t \to +\infty} V(t) = x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right) - t_1$.
Mais (par lien suite-série ou télescopage et avec 19.) $V(t) = \sin(x) - v_1(t)$ donc en passant à la limite ($t \to +\infty$), nous obtenons aussi $\lim_{t \to +\infty} V(t) = \sin(x) - t_1$ et par unicité limite le résultat désiré ■

25. Montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] - \{0\}$,

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2x}{(j\pi)^2 - x^2}.$$

Solution :
On utilise 14. dont les hypothèses sont satisfaites par en posant $f_k : x \to -\frac{x^2}{(k\pi)^2}$ et en prenant le segment $\mathcal{S} \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] - \{0\}$ ■

26. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On pourra dans un premier temps déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2 \sin(x)}$.

Solution :
Posons pour $x \in]0, \pi/2]$, posons $G(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2 \sin(x)}$ $(\heartsuit)$.
On a donc aussi pour $x \in [0, \pi/2]$, $G(x) = -2 \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j\pi)^2 - x^2}$.
On vérifie que G est la somme d'une série de fonctions continues sur $[0, \pi/2]$ qui y converge normalement donc G est continue en 0 avec $G(0) = -\frac{1}{\pi^2} (\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2})$.
Mais avec $(\heartsuit)$ $G(x) = \frac{-x^3/2 + x^3/6 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \sim \frac{-1}{6}$ pour $x \to 0$ donc $G(0) = \frac{-1}{6}$ ■

FIN DU SUJET