
Corrigé du DS3 (4h) (Option Centrale +).

• La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés.
• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert et bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

1 Partie Centrale

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geq p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n\geq p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod_{n\geq p} u_n$.
Si la suite $(P_n)_{n\geq p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} P_n.$$

1.1 Résultats préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

1. Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right) - 1\right| \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right) - 1.$$

Solution :
Posons $A_n = \prod_{k=1}^{n}(1+x_k) - 1$ et $B_n = \prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|) - 1$ et montrons l'inégalité proposée par récurrence sur n.
Pour $n = 1$ l'inégalité se résume à $|x_1| \leq |x_1|$.
Supposons la établie au rang n et partons de $|A_{n+1} = A_n + x_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)|$. Par inégalités triangulaires puis par HR $|A_{n+1}| \leq |A_n| + |x_{n+1}|\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|) \leq |B_n| + |x_{n+1}|\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|) = B_{n+1}$. La récurrence se poursuit bien. ■

2. Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Solution :
Par inégalité de convexité usuelle $1 + x_k \leq e^{x_k}$, ce pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Les deux membres de cette inégalité générique étant positifs, on a $\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{x_k} = e^{(\sum_{k=1}^{n} x_k)}$ ■
Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^z.

3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$|(1 + t) - \mathrm{e}^t| \leqslant |t|^2 \mathrm{e}^{|t|}$$

Solution :
On sait que $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ donc $|e^t - 1 - t| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!}$ (inégalité triangulaire impliquant la somme d'une série ACV) soit enfin (changement d'indice) $|e^t - 1 - t| \leq |t|^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|t|^m}{(m+2)!} \leq |t|^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|t|^m}{m!} = |t|^2 e^{|t|}$ ■

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.
Montrer que $|a^n - b^n| \leq nM^{n-1}|a - b|$.
Solution :
On connaît l'identité algébrique $a^n - b^n = (a - b)(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k})$ donc par inégalité triangulaire (encore !) il vient :
$|a^n - b^n| \leq |a - b|(\sum_{k=0}^{n-1} |a|^k |b|^{n-1-k}) \leq |a - b| n M^{n-1}$ ■

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leq \frac{|z|^2}{n}\mathrm{e}^{|z|}$.
Solution :
En fixant $n \in N^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on applique 4. à $a = 1 + z/n$ et $b = e^{z/n}$.
En remarquant que $|a| \leq 1 + |z/n| \leq e^{|z/n|}$ et $|b| = \exp(\Re(z)/n) \leq e^{|z/n|}$ donc que $M \leq e^{|z/n|}$, ce qui donne $\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leq n e^{\frac{(n-1)|z|}{n}} |1 + z/n - e^{z/n}| \leq n e^{\frac{(n-1)|z|}{n}} \frac{|z|^2}{n^2} e^{\frac{|z|}{n}}$ avec l'inégalité obtenue en 3.
Soit enfin l'inégalité désirée ■

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers e^z.
Solution :
?? ■

1.2 Etude d'une fonction définie par un produit infini

On considère dans cette partie :

- a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a, b]$.
- $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $]-1, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x)), \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|), \quad \text{et sous conditions d'existence } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|.$$

On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathcal{S}$ et que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} |f_n]$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction R_0.

7. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leq \mathrm{e}^M |f_{n+1}(x)|.$$

Solution :
La convergence uniforme sur $\mathcal{S}$ de la série de fonctions continues (sur $\mathcal{S}$) $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ assure la continuité de R_0 sur $\mathcal{S}$ donc l'existence d'un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{S}$ on ait $R_0(x) \leq M$.
Soient $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{S}$, comme en utilisant 2. $Q_{n+1}(x) - Q_n(x) = Q_n(x)|f_{n+1}(x)| \leq \exp(\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|)|f_{n+1}(x)|$, on dispose a fortiori de l'inégalité $Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leq \exp(R_0(x))|f_{n+1}(x)| \leq \mathrm{e}^M |f_{n+1}(x)|$ ■

8. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq Q_{n+1}(x) - Q_n(x).$$

Solution :
Dans le contexte de la question $|P_{n+1}(x) - P_n(x)| = |P_n(x)||f_{n+1}(x)| \leq Q_n(x)|f_{n+1}(x)| = Q_{n+1}(x) - Q_n(x)$ ■

9. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction P définie sur $\mathcal{S}$ par :

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) \end{cases}$$

Solution :
Fixons d'abord $x \in \mathcal{S}$ par principe de comparaison l'utilisation des deux questions précédentes montre que la série de terme général $P_{n+1}(x) - P_n(x)$ est ACV donc CV; le lien suite-série implique alors que la suite $(P_n(x))$ converge. Par définition du produit infini la limite de cette suite est $P(x)$. Il en résulte que $\boxed{\text{la suite de fonctions } (P_n) \text{ CVS vers } P \text{ sur } \mathcal{S}}$ □
Etablissons que cette CVS est en fait uniforme en fixant $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{S}$.
En utilisant 8., on a $\sum_{k=n}^{k=n+p} |P_{k+1}(x) - P_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{k=n+p} (Q_{k+1}(x) - Q_k(x))$, ce pour tout entier naturel p.
Soit (inégalité triangulaire , télescopage et 7.): $|P_{n+p+1} - P_n(x)| \leq e^M (\sum_{k=n}^{k=n+p} |f_{n+1}(x)|)$.
En faisant enfin tendre p vers $+\infty$, il vient par conservation des inégalités à la limite :
$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{S}$, $|P(x) - P_n(x)| \leq e^M R_n(x) \leq e^M \|R_n\|_\infty^{\mathcal{S}} = \alpha_n$.
La CVU sur $\mathcal{S}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ donne que la suite (α_n) converge vers 0, ce qui avec l'inégalité précédente traduit la $\boxed{\text{CVU de la suite de fonctions } (P_n) \text{ sur } \mathcal{S} \text{ vers la fonction } P}$ ■

10. Montrer que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.
Solution :
La continuité sur $\mathcal{S}$ de toutes les f_k fait que chaque P_n est continue sur $\mathcal{S}$, la CVU prouvée précédemment et le théorème C^0 pour les suites de fonctions garantissent la continuité de P sur $\mathcal{S}$□
Soit $x \in \mathcal{S}$, pour tout $n \geq 1$, $f_n(x) + 1 > 0$; on peut donc considérer $u_n = \ln(1 + f_n(x))$ et on a $|u_n| \sim |f_n(x)|$ ainsi $\sum_{n\geq 1}$ est une série convergente dont la somme $T(x)$ est un réel. Ce que l'on peut traduire en disant que $\sum_{k=1}^{n} u_k \to T(x)$ si $n \to +\infty$ ou encore que la suite $(\ln(P_n(x))$ converge vers le réel $T(x)$ soit, par composition, que $(P_n(x))$ converge vers $e^{T(x)} > 0$ donc $P > 0$ ■

1.3 Généralités

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - e^{-nx^2}\right)$.

11. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.
Solution :
Il s'agit d'un cas particulier de la situation précédente appliquée à tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ d'où la continuité de f sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ donc sur cet intervalle (en effet la série la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ CVN sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ et même sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$, où $a > 0$) ■

12. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^\star$ puis calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
Solution :
On a pour $0 < x < y$, $0 < 1 - e^{-nx^2} < 1 - e^{-ny^2}$, ce pour tout $n \in N^*$ donc $P_n(x) \leq P_n(y)$ puis par conservation des inégalités à la limite $f(x) \leq f(y)$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
Pour tout $x > 0$, $0 < f(x) \leq 1 - e - x^2$ donc en faisant tendre x vers 0, on trouve (gendarmes) $f(x) \to 0$.
Pour des raisons analogues à celles données dans la réponse à la question précédente la fonction $g : x > 0 \to \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + e^{-nx^2}\right)$ et en utilisant la question 1. (avec un passage à la limite) on récupère l'inégalité $(\star)|f(x) - 1| \leq g(x) - 1$ Par ailleurs g est décroissante, minorée par 1 et f est croissante et majorée par 1 et > 0; ces deux fonctions ont donc des limites finies et strictement positives en $+\infty$ que l'on note respectivement L' et L.
On peut remarquer que $f(x)g(x) = f(\sqrt{2}x)$ donc en passant à la limite, on tire $L'L = L'$ d'où $L = 1$ ($L' \neq 0$) puis en passant à la limite dans $(\star)$, on finit par trouver $\boxed{L = 1}$(Il y a sûrement plus simple) ■
On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ telle que :

- la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} |f_n]$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.
- la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{f_n'}{1 + f_n}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathcal{S}$,

$$P_n'(x) = P_n(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{1 + f_k(x)}.$$

Solution :
Simple dérivation logarithmique ■

14. En déduire que la fonction

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ et que

$$\forall x \in \mathcal{S}, \ \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}$$

Solution :
On va appliquer à la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$, où on a posé $g_n = \ln(1 + f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème de dérivation terme à terme.
On observe à cette fin :
i) $\forall n \geq 1$, g_n est de classe C^1 sur $\mathcal{S}$.

ii) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ CVS sur $\mathcal{S}$ (Voir Réponse à 10.).

iii) Comme $g'n = \dfrac{f'_n}{1+f_n}$, la série $\sum_{n\geq 1} g'_n$ CVU sur $\mathcal{S}$.

On peut donc affirmer que $T = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ est classe C^1 sur $\mathcal{S}$ et (cf Réponse à 10.) puisque $P = e^T$, P est de même régularité.

Par dérivation terme à terme et pour tout $x \in \mathcal{S}$: $T'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}$, comme $T = \ln(P)$, cette formule équivaut à celle demandée ■

1.4 Expression de la fonction sinus comme produit infini

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right).$$

Dans les quatre questions suivantes, on fixe un entier naturel n.

15. Montrer que P_n est un polynôme de degré $2n+1$.
Solution :
En tant que CL de polynômes de degré $2n+1$, P_n est un polynômes de degré $\leq 2n+1$. On localise le coefficient du terme de ce degré et on trouve $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}} \neq 0$ donc $\deg(P_n) = 2n+1$ ■

16. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $x_k = (2n+1)\tan\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$. Montrer que l'ensemble des racines de P_n est $\{x_k \,|\, k \in [\![0, 2n]\!]\}$.
Solution :
On pose $J = [0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi[$ Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$,on pose $\theta_k = \dfrac{k\pi}{2n+1} \in J$; alors $2iP_n(x_k) = (1+i\tan(\theta_k))^{2n+1} - (1+i\tan(\theta_k))^{2n+1}$ soit $2i(\cos(\theta_k))^{2n+1}P_n(x_k) = (e^{i\theta_k})^{2n+1} - (e^{-i\theta_k})^{2n+1}$. Puis avec Moivre $2i(\cos(\theta_k))^{2n+1}P_n(x_k) = e^{ik\pi} - e^{-ik\pi} = (-1)^k - (-1)^k = 0$ d'où $P_n(x_k) = 0$ puisque $\cos(\theta_k) \neq 0$. Les θ_k formant une suite finie strictement croissante de $[0, \pi/2[$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et aussi de $]\pi/2, \pi[$ pour les autres indices on dispose (par stricte croissance de tan sur chaque intervalle) des inégalités $x_{n+1} < ... < x_{2n} < x_0 = 0 < ..... < x_n$ donc de $2n+1$ racines deux à deux distinctes pour P_n dont le degré vaut $2n+1$. Nous avons ainsi déterminer toutes les racines de P_n, à savoir les x_k, où k varie dans $[\![0, 2n]\!]$ ■

17. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$P_n(X) = \lambda X \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right).$$

Solution :
Ayant déterminer toutes les racines de P_n, on peut factoriser P_n comme suit :
$P_n = \mu \prod_{k=0}^{2n}(X - x_k)$, où $\mu \in \mathbb{C}^*$. Or $x_0 = 0$ et $x_{2n+1-k} = -x_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ ($\tan(\pi - x) = -\tan(x)$!!) donc la factorisation devient $P_n = \mu X \prod_{k=1}^{n}(X^2 - x_k^2) = \lambda X \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \dfrac{X^2}{x_j^2}\right)$ avec $\lambda = (-1)^n \mu (\prod_{k=1}^{n} x^k)^2$ ■

18. En calculant $P'_n(0)$, montrer que :

$$P_n(X) = X \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right).$$

Solution :
Comme $P_n(0)=0$, $P_n'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P_n(x)}{x}=\lambda$ avec l'expression obtenue en 18.
Mais on peut déterminer cette dérivée en 0 avec la définition de P_n, il s'agit du coefficient du terme en X. Avec le binôme de Newton on trouve $\dfrac{1}{2i}\times 2i\dbinom{2n+1}{1}\dfrac{1}{2n+1}=1$ ■

19. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sinus.
Solution :
Grâce au résultat de 6., nous avons, pour tout réel x, $P_n(x)\to\dfrac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})=\sin(x)$ si $n\to+\infty$ d'où le résultat ■
Dans cette sous-partie, on fixe un réel x et on considère la suite de fonctions $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall k\in\mathbb{N}^\star,\ v_k:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\left\{\begin{array}{ll}x\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{\left(\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor+1}\right)(2\lfloor t\rfloor+1)\right)^2}\right) & \text{si } t\geq k\\ P_{\lfloor t\rfloor}(x) & \text{si } t<k.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

20. Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geq 2$,

$$|v_k(t)-v_{k-1}(t)|\leq\frac{x^2}{k^2\pi^2}|v_{k-1}(t)|.$$

Solution :
Pour $k\geq 2$ et $t\geq 0$, posons $w_k=|v_k(t)-v_{k-1}(t)|$ et $m=\lfloor t\rfloor$.
Premier cas : $t\geq k(\geq k-1)$ alors $w_k=x^2|v_{k-1}(t)|\dfrac{1}{(2m+1)\tan(\frac{k\pi}{2m+1})}$ mais sachant que $\tan(u)\geq u$ pour $u\in[0,\pi/2[$, on a $w_k\leq x^2|v_{k-1}(t)|\dfrac{1}{k^2\pi^2}$.
Deuxième cas $t\in[k-1,k[$ comme $m=k-1$, $w_k=0\leq x^2|v_{k-1}(t)|\dfrac{1}{k^2\pi^2}$.
Troisième cas $t<k-1<k$ idem au second cas ■

21. Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et $k\in\mathbb{N}^\star$,

$$|v_k(t)|\leq|x|\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

Solution :
La question précédente et l'inégalité triangulaire inverse donne (même contexte) :
$|v_k(t)|\leq(1+\dfrac{x^2}{k^2\pi^2})|v_{k-1}(t)|$.
Ceci entraîne $|v_k(t)|\leq\displaystyle\prod_{j=2}^{k}(1+\frac{x^2}{j^2\pi^2})|v_1(t)|\leq\exp x^2(\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j^2\pi^2})$ (en utilisant 2.)
Comme $|v_1(t)|\leq|x|$, on a ce que l'on veut ■

22. En déduire que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 2}(v_k-v_{k-1})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
Solution :
En combinant les deux questions précédentes, on a la CVN sur $\mathbb{R}_+$ de cette série de fonctions ■

23. Calculer, pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$, $\lim\limits_{t\to+\infty}v_k(t)$ et, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{k\to+\infty}v_k(t)$.
Solution :

D'abord on fixe k et on fait tendre t vers $+\infty$ donc $v_k(t) = x\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{\left(\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor+1}\right)(2\lfloor t\rfloor+1)\right)^2}\right) \to$ $x\prod_{j=1}^{k}(1-\frac{x^2}{j^2\pi^2})$.
En renversant le protocole précédent la limite vaut cette fois $P_{\lfloor t\rfloor}(x)$ ■

24. En déduire que :

$$\sin(x) = x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

Solution :
On peut appliquer le théorème de la double limite à la série de fonction $\sum_{k\geq 2}(v_k - v_{k-1})$ pour $t \to +\infty$, ce grâce aux informations acquises en 22. et 23. .
On pose, pour $k \geq 2$, $t_k = x\prod_{j=1}^{k}(1-\frac{x^2}{j^2\pi^2})$.
En notant V la somme de notre série de fonctions, il vient $\lim_{t\to+\infty} V(t) = \sum_{k=2}^{\infty}(t_k - t_{k-1})$, où est sous-entendue la convergence de la série dont la somme est manipulée sans vergogne.
On a donc $\lim_{t\to+\infty} V(t) = x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) - t_1$.
Mais (par lien suite-série ou télescopage et avec 19.) $V(t) = \sin(x) - v_1(t)$ donc en passant à la limite ($t \to +\infty$), nous obtenons aussi $\lim_{t\to+\infty} V(t) = \sin(x) - t_1$ et par unicité limite le résultat désiré ■

25. Montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$,

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2x}{(j\pi)^2 - x^2}.$$

Solution :
On utilise 14. dont les hypothèses sont satisfaites par en posant $f_k : x \to -\frac{x^2}{(k\pi)^2}$ et en prenant le segment $\mathcal{S} \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ ■

26. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
On pourra dans un premier temps déterminer $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2\sin(x)}$.
Solution :
Posons pour $x \in]0, \pi/2]$, posons $G(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2\sin(x)}$ $(\heartsuit)$.
On a donc aussi pour $x \in [0, \pi/2]$, $G(x) = -2\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{(j\pi)^2 - x^2}$.
On vérifie que G est la somme d'une série de fonctions continues sur $[0, \pi/2]$ qui y converge normalement donc G est continue en 0 avec $G(0) = -\frac{2}{\pi^2}(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2})$.
Mais avec $(\heartsuit)$ $G(x) = \frac{-x^3/2 + x^3/6 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \sim \frac{-1}{3}$ pour $x \to 0$ donc $G(0) = \frac{-1}{3}$, ce qui donne le résultat attendu ■

2 Algèbre linéaire

Soient $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.
On appelle commutant de A l'ensemble $C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{K})\text{telle que}AM = MA\}$.
On vérifie sans peine que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.
1) Dans cette question seulement $n = 2$.
Prouver que $\dim(C(A)) \geq 2$.
On suppose jusqu'en 5) que A de $M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable et on note $\lambda_1, ..., \lambda_s$ ses différentes valeurs propres.
On considère enfin f l'endomorphisme canoniquement associé à A ainsi que E_i le sous-espace propre de f associé à λ_i, ce pour tout $i \in [\![1, s]\!]$.
Par ailleurs on désigne par $C(f)$ le commutant de f, à savoir le K espace vectoriel des endomorphismes de K^n permutables avec f.
2) Vérifier que : $g \in C(f) \iff \forall i \in [\![1, s]\!], g(E_i) \subset E_i$.
3) Etablir que $\theta : g \in C(f) \to (g_1, ..., g_s)$, où pour tout $i \in [\![1, s]\!]$ g_i désigne l'endomorphisme de E_i induit par g, réalise un isomorphisme de $C(f)$ sur $\displaystyle\prod_{i=1}^{s} L(E_i)$.
4) En déduire la dimension de $C(f)$ et celle de $C(A)$.
5) Prouver que $\dim(C(A)) \geq n$ et caractériser le cas d'égalité.
Désormais N est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice de nilpotence n.
6) Montrer que $\dim(C(N)) \geq n$.

Solution :
1) De façon évidente $Vect(I_2, A) \subset C(A)$.
Si A n'est pas scalaire $\dim(Vect(I_2, A)) = 2$ d'où le résultat.
Sinon A commute avec toute matrice et $\dim(C(A)) = 4$ ■
Pour les questions 2) ...5), on utilise (f dz) le fait que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} E_i$ $(\star)$.
2) La condition est nécessaire par le cours et, en prenant (cf $(\star)$) $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} x_i$, où $x_i \in E_i$, il vient $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i$ donc $g(f(x)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i g(x_i) = f(g(x))$, puisque chaque $g(x_i) \in E_i$ donc $fog = gof$■
3) Par la question précédente, cette application est bien définie; sa linéarité ne pose aucune difficulté.
Elle est injective puisque si chaque $g_i = 0_{L(E_i)}$ alors $g = 0_{L(E)}$ grâce à $(\star)$.
Soit $(h_1, .., h_s) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{s} L(E_i)$ posons, pour $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} x_i$, où $x_i \in E_i$, $h(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} h(x_i)$; alors $h \in L(E)$ et pour chaque $i \in [\![1, s]\!]$, E_i est stable par h et h_i est bien l'endomorphisme de E_i induit par $h \in C(f)$.
De ceci on tire la surjectivité de θ■
4) Un isomorphisme conservant les dimensions, on en déduit que $\dim(C(f)) = \dim(\displaystyle\prod_{i=1}^{s} L(E_i)) = \sum_{i=1}^{s} (\dim(E_i))^2$.
Par ailleurs, par isomorphisme canonique $\dim(C(A)) = \dim(C(f))$■
5) $(\star)$ donne $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} \dim(E_i) = n$ comme (pour tout i) $(\dim(E_i))^2 \leq \dim(E_i)$, on a bien le résultat souhaité■
6) $Vect(I_n, N, ..., N^{n-1}) \subset C(N)$, il nous suffit de montrer que $(I_n, N, ..., N^{n-1})$ est une famille libre de $M_n(\mathbb{K})$.
Soit alors $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i N^i = 0_n$ en multipliant successivement cette égalité par $N^{n-1}, ...I_n$, on récupère $\lambda_0 = 0....\lambda_{n-1} = 0$■

3 Analyse

Notations.

On introduit les trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de fonctions suivants.

- $C_0(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} u(x)$$

  On rappelle qu'une telle fonction u est nécessairement bornée sur $\mathbb{R}$.

- $C_0^\infty(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$) u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to -\infty} u^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} u^{(k)}(x)$$

  On a noté $u^{(k)}$ la dérivée k-ième de u.

- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues positives et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.

On munit $C_0(\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$: plus précisément, pour toute fonction $u \in C_0(\mathbb{R})$, on pose

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|$$

On pourra utiliser librement le théorème de Fubini *admis* ci-dessous :

Théorème 1. *(Fubini) Soit $(x,y) \mapsto F(x,y)$ une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que F vérifie les trois propriétés suivantes.*

1) *Pour tous réels x, y, les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(v,y)|\, dv$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,t|\, dt$ convergent.*

2) *Les fonctions $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|\, dx$, $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|\, dy$, $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dx$, $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dy$ sont toutes continues sur $\mathbb{R}$.*

3) *$y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|\, dx$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|\, dx \right) dy$$

   converge.

Alors, dans ce cas, $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dx$ et $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dy$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et leurs intégrales sur $\mathbb{R}$ sont égales. Autrement dit, on peut intervertir les deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dy \right) dx$$

4 Préliminaires.

Pour f et g appartenant respectivement à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R})$, on définit le produit de convolution $f * g$ par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\, dt$$

On définit $f * g(x)$ par la même formule si $f \in C_0(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q.1. Soient $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $g \in C_0(\mathbb{R})$. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt$ converge pour tout réel x. Puis montrer que $f * g$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser le théorème de continuité sous les igne $\in$ et on vérifiera avec soin que les conditions de validité sont remplies). Vérifier de plus que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = g * f(x)$$

Solution : Par définition tout élément de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Nous prouvons que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$ ce qui impliquera qu'elle y est en particulier définie. Pour cela nous utilisons le théorème de continuité sous le signe intégral dont nous allons vérifier les hypothèses.
a) Pour tout réel t : $x \to f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque g l'est.
b) Pour tout réel x : $t \to f(t)g(x-t)$ est continue (donc CM) sur $\mathbb{R}$ puisque g et f le sont.
c) Soit M unn réel positif majorant $|g|$ (le préambule nous assure que g est bornée sur $\mathbb{R}$).
Dés lors $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, |f(t)g(x-t)| \leq Mf(t)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Ce qui acte la domination.
Ces trois points donnent bien la continuité de $f * g$ sur $\mathbb{R}\square$
Le changement de variable affine (x étant fixé) $t = x - u$, où u décrit $\mathbb{R}$, donne $f * g(x) = g * f(x)\blacksquare$

Q.2. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f * g(x) = 0$. Montrer de même que $\lim_{x \to -\infty} f * g(x) = 0$
Solution : On fixe t alors $f(t)g(x-t) \underset{x \to \pm\infty}{\to} 0$, ce puisque $g \in C_0(\mathbb{R})$. Comme l'application nulle est continue (donc CM) sur $\mathbb{R}$ et que la domination utilisée en Q1 reste valable, nous pouvons employer le théorème de la limite sous le signe intégral qui donne ici $f * g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\to} \int_{-\infty}^{+\infty} 0dt = 0\blacksquare$

Q.3. Soient f et g appartenant à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Montrer alors que $f * g$ définit une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Plus précisément, montrer que $f * g$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$, bornée, positive et d'intégrale égale à 1. (On appliquera le théorème de Fubini à la fonction $(x,y) \mapsto f(y)g(x-y)$ et on pourra se contenter de ne vérifier que les conditions 1) et 3)).
Solution : Avec les notations déjà utilisées et la domination on a :
La continuité de $f * g$ se vérifie par les mêmes arguments que ceux employés en Q1$\square$
$\forall x \in \mathbb{R}, |f * g(x)| \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = M$, ce puisque $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ donc $f * g$ est bornée sur $\mathbb{R}\square$
Supposons maintenant que nous puissions utiliser le théorème de Fubini.
Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)dx)dt.$
Donc après changement de variable affine $x = u+t$ nous avons $\int_{-\infty}^{+\infty} (f*g(x)dx = (\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt)(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)du = 1 \times 1 = 1\square$
Vérifions la validité de l'emploi du théorème : les applications $(x,t) \to t$ et $(x,t) \to x-t$ étant linéaires sur $\mathbb{R}^2$, elles y sont continues et, par composition et produit nous récuperons la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de $(x,t) \to f(t)g(x-t)$.
Le point 1) du théorème de Fubini provient de l'intégrabilité de f et g.
Vérifions le point 3) à savoir que $F : t \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dx$ est intégrable. Ceci est évident puisque pour tout réel t : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dx = f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)dx = f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)du = f(t)\blacksquare$