Devoir à la maison n° 5
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x,y) = (4,4) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= 4 \\ xy &= 4 \end{cases} \\ &\underset{z=x \text{ ou } y}{\Leftrightarrow} 0 = (z-x)(z-y) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2 \\ &\Leftrightarrow z = 2 \\ &\Leftrightarrow (x,y) = (2,2), \end{aligned}$$

donc $f^{-1}(\{(4,4)\}) = \{(2,2)\}$.
De même :

$$f(x,y) = (1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= 1 \\ xy &= 1 \end{cases} \underset{z=x \text{ ou } y}{\Leftrightarrow} z^2 - z + 1 = 0,$$

or ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, donc $f^{-1}(\{(1,1)\}) = \emptyset$, et :

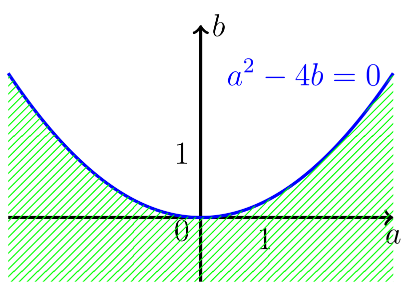
$$f(x,y) = (0,-4) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= 0 \\ xy &= -4 \end{cases} \underset{z=x \text{ ou } y}{\Leftrightarrow} z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 2 \underset{xy<0}{\Leftrightarrow} (x,y) = \pm(2,-2),$$

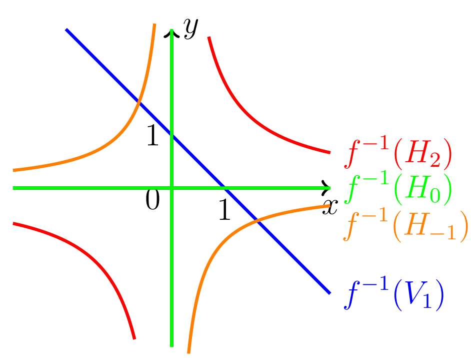
donc $f^{-1}(\{(0,-4)\}) = \{(2,-2),(-2,2)\}$.

2. Comme $(0,-4)$ a deux antécédents, f n'est pas injective.
Comme $(1,1)$ n'a pas d'antécédent, f n'est pas surjective.

3. Soient $(a,b),(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En notant à nouveau $z = x$ ou y : $f(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow z^2 - az + b = 0$.
Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = a^2 - 4b$; et (a,b) admet un antécédent par f si et seulement si ce trinôme a des racines réelles, c'est-à-dire $\Delta \geq 0$.

4. Notons $V_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\}$ et $H_b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = b\}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
   - $(x,y) \in f^{-1}(V_a) \Leftrightarrow x + y = a \Leftrightarrow y = a - x$, donc $f^{-1}(V_a)$ est la droite d'équation $y = a - x$.
   - $(x,y) \in f^{-1}(H_b) \Leftrightarrow xy = b \underset{\text{si } x \neq 0}{\Leftrightarrow} y = \dfrac{b}{x}$, et $0 \times y = b \Leftrightarrow b = 0$; or, dans le cas $b = 0$: $xy = b \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$. Donc : si $b \neq 0$, $f^{-1}(H_b)$ est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{b}{x}$, et si $b = 0$, $f^{-1}(H_0)$ est la réunion des axes d'équation $x = 0$ et $y = 0$.





Exercice 2.

1. Supposons que ab soit un carré, notons $ab = p_1^{2k_1} \dots p_r^{2k_r}$ sa décomposition en facteurs premiers. Comme a et b sont premiers entre eux, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, p_i ne peut être un facteur commun à a et b. Quitte à changer l'ordre des p_i, il existe donc $s \in [\![1, r]\!]$ tel que $a = p_1^{2k_1} \dots p_s^{2k_s}$ et $b = p_{s+1}^{2k_{s+1}} \dots p_r^{2k_r}$. Donc a et b sont des carrés.
2. (a) On a $x = dx'$, $y = dy'$ et $z = dz'$, donc $d^2z' = d^2x'^2 + d^2y'^2 = d^2(x'^2 + y'^2)$. Donc $x'^2 + y'^2 = z'^2$: (x', y', z') est bien pythagoricien.

   (b) On raisonne par l'absurde :
   - si x et y sont tous deux pairs, alors $x^2 + y^2$ est pair, donc z^2 est pair, donc z est pair, et x, y, z ne sont donc pas premiers entre eux, ce qui est faux,
   - si x et y sont tous deux impairs, alors $x^2 + y^2$ est pair, donc z^2 est pair, donc z est pair. Il existe alors $j, k, l \in \mathbb{N}$ tels que $x = 2j + 1$, $y = 2k + 1$, $z = 2l$, donc :
   $$z^2 = 4l^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 4(j^2 + k^2 + j + k) + 2,$$
   donc 4 divise z^2 mais ne divise pas $x^2 + y^2$, ce qui est absurde.

   Donc x et y sont de parité différente. Donc $z^2 = x^2 + y^2$ est impair, donc z est impair.

   (c) D'après le résultat précédent, il existe $j, k, l \in \mathbb{N}$ tels que $x = 2j + 1$, $y = 2k$ et $z = 2l + 1$, donc :
   $$y^2 = 4k^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x) = 4(l + j)(l - j),$$
   donc $(l + j)(l - j)$ est un carré.
   Or, si d divise $l + j$ et $l - j$, alors d divise $z + x$ et $z - x$, donc divise x et z, et y également d'après le calcul précédent. Donc $l + j$ et $l - j$ sont premiers entre eux. D'après le résultat de la question 1, il existe donc $u, v \in \mathbb{N}^*$ tels que $l + j = u^2$ et $l - j = v^2$.
   Comme $l + j$ et $l - j$ sont premiers entre eux, u et v le sont également, et on a directement :
   $$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u^2 + v^2.$$
3. (a) Comme a, b, c sont premiers entre eux, a^2, b^2, c le sont également, et $(a^2)^2 + (b^2)^2 = c^2$, donc (a^2, b^2, c) est pythagoricien primitif (quitte à échanger a et b). On a donc :
   $$a^2 = p^2 - q^2, \quad b^2 = 2pq, \quad c = p^2 + q^2,$$
   donc en particulier : a, p, q sont premiers entre eux (car p et q le sont) et $a^2 + q^2 = p^2$.
   Comme a^2 est impair, a l'est également, donc (a, q, p) est pythagoricien primitif. On a donc :
   $$a = m^2 - n^2, \quad q = 2mn, \quad p = m^2 + n^2.$$

   (b) On utilise la relation $b^2 = 2pq$: p et $2q$ sont premiers entre eux (car p et q le sont et q est pair, donc p est impair), donc, d'après la question 1, p et $2q$ sont des carrés. On note $p = c'^2$ et $2q = d'^2$. Alors, d'après la relation $q = 2mn$: $d'^2 = 4mn$ donc, comme m et n sont premiers entre eux, et toujours d'après la question 1, m et n sont des carrés.

   (c) D'après la relation $m^2 + n^2 = p$, et le résultat précédent : $a'^4 + b'^4 = c'^2$, et $c'^2 = p^2 < p^2 + q^2 = c$, donc $c' < c$. De plus, comme m et n sont premiers entre eux, a', b', c' le sont.
   En réitérant cette preuve, il existe $a'', b'', c'' \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $a''^4 + b''^4 = c''^2$, avec $c'' < c' < c$, et ainsi une suite strictement décroissante d'entiers naturels, ce qui est absurde. Donc a, b, c n'existent pas.
4. Supposons qu'il existe $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $x^4 + y^4 = z^4$. Quitte à diviser par un diviseur commun à x, y et z, on peut les supposer premiers entre eux. Alors $(a, b, c) = (x, y, z^2)$, triplet d'entiers premiers entre eux, vérifie $a^4 + b^4 = c^2$, ce qui est impossible d'après le résultat précédent. Donc :
   $$\forall (x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3, \quad x^4 + y^4 \neq z^4.$$