Feuille d'exercices 8
Éléments de correction

Exercice 3. Par l'absurde, supposons que cette fonction admette une primitive F.
Alors : $\forall x \leq 0,\ F'(x) = 0$ et : $\forall x > 0,\ F'(x) = 1$. Il existe donc $c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x < 0,\ F(x) = c$ et : $\forall x > 0,\ F(x) = x + d$.
La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est une primitive), donc en particulier F est continue en 0, donc $c = d = F(0)$. Alors : $\forall x \neq 0,\ \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 1$ si $x > 0$, 0 si $x < 0$. Donc F n'est pas dérivable en 0, ce qui est absurde. Donc F n'existe pas.

Exercice 4.

(a) Comme $x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et que $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0, f n'a pas de limite en 0, donc n'est pas continue en 0.

(b) On a directement $F' = f$.
Il n'est donc pas nécessaire d'être continue pour être primitivable.

Exercice 7. On a : $P(\lambda) = \lambda^2 \displaystyle\int_a^b g^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b f^2$.
Le discriminant de $P(\lambda)$ vaut donc $\Delta = 4\left(\displaystyle\int_a^b fg\right)^2 - 4\int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.
Comme P est positif sur $\mathbb{R}$, son discriminant est négatif, d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Il y a égalité lorsque $\Delta = 0$, c'est-à-dire lorsque P s'annule, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f + \lambda_0 g = 0$ (par positivité de l'intégrale) ; c'est-à-dire lorsque f et g sont proportionnelles.

Exercice 9.

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2} = -\frac{1}{x-3} + c,\ c \in \mathbb{R},$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{8x^2 + 50} = \frac{1}{50}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2x}{5}\right)^2} = \frac{1}{20}\arctan\left(\frac{2x}{5}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

Exercice 11.

(a) $\displaystyle\int_1^e (\ln(t))^2 dt = [(t\ln t - t) \times \ln t]_1^e - \int_1^e (\ln t - 1)dt = [2t - t\ln t]_1^e = e - 2,$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}(1-x)^b\right]_0^1 + \frac{b}{a+1}\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{a!b!}{(a+b+1)!},$

(c) $\displaystyle\int_0^1 x^a(\ln x)^b dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}(\ln x)^b\right]_0^1 - \frac{b}{a+1}\int_0^1 x^a(\ln x)^{b-1}dx = (-1)^b\frac{b!}{(a+1)^{b+1}},$

(d) $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \left[t(1-t^2)^n\right]_0^1 + 2n\int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1}dt,$
donc $I_n - 2nI_{n-1} = -2nI_n$, donc $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$

Exercice 13.
(c) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx \underset{t=\ln x,\ dt=\frac{dx}{x}}{=} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$,

(d) (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x})dx = \underset{t=\sqrt{x},\ dx=2tdt}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos(t)dt = [2t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t dt = \pi - 2.$

Exercice 14.
(a) Direct par le changement de variables $x = \dfrac{\pi}{4} - t$.

(b) $\forall t \in \mathbb{R},\ \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - t\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos t + \sin t)$, donc d'après (a) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\, dt = -\frac{\pi\ln(2)}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t + \sin t)\, dt,$$

et donc : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos t + \sin t}{\cos t}\right) dt = \frac{\pi\ln(2)}{8}.$

Exercice 15. On pose $x = \sin t$. On a $dx = \cos t dt$, donc :

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2 t dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c,$$

donc :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 16. Les règles de Bioche permettent de déterminer un changement de variable adapté dans une fraction trigonométrique grâce à ses symétries :
- si $f(-x)d(-x) = f(x)dx$, alors on pose $t = \cos x$,
- si $f(\pi - x)d(\pi - x) = f(x)dx$, alors on pose $t = \sin x$,
- si $f(\pi + x)d(\pi + x) = f(x)dx$, alors on pose $t = \tan x$.

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx \underset{t=\cos x}{=} \int \frac{-dt}{1+t} = -\ln|1+t| + c,\ c \in \mathbb{R},$

(b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}dx \underset{t=\sin x}{=} \int \frac{dt}{2t^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right| + c,\ c \in \mathbb{R},$

(c) $\displaystyle\int \frac{3-\sin x}{\cos x + 3\tan x}dx \underset{t=\sin x}{=} \int \frac{3-t}{1+3t-t^2}dt = \int \left(\frac{1}{2}\frac{2t-3}{t^2-3t-1} - \frac{3}{2}\frac{1}{t^2-3t-1}\right) dt$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\ln|t^2-3t-1| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{2t-3+\sqrt{13}}{2t-3-\sqrt{13}}\right| + c,\ c \in \mathbb{R},$

(d) $\displaystyle\int \cos^2 x \sin^2 x dx \underset{t=\tan x}{=} \int \frac{t^2}{(1+t^2)^3}dt = \int \frac{t}{4}\frac{4t}{(1+t^2)^3}dt = -\frac{1}{4}\frac{t}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$
$\displaystyle= -\frac{1}{4}\frac{t}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{8}\arctan(t) + \frac{1}{8}\frac{t}{1+t^2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$

Exercice 17. On a $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$ et $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$, donc :

(a) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^1 \frac{2dt}{3+t^2} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x} = \int_0^1 \frac{dt}{1-t+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

(c) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x-\cos x+\sqrt{2}} = \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{2dt}{(1+\sqrt{2})t^2+2t+\sqrt{2}-1}$$
$$= \frac{2}{1+\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{dt}{t^2+2(\sqrt{2}-1)t+(\sqrt{2}-1)^2} = 2(\sqrt{2}-1)\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{dt}{\left(t+(\sqrt{2}-1)\right)^2}$$
$$= 2(\sqrt{2}-1)\left[-\frac{1}{t+(\sqrt{2}-1)}\right]_0^{\sqrt{2}-1} = 1.$$