

CHAPITRE 3

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

CORRECTION

1 PONT ROULANT (ATTENTION NUMEROTATION NON CONFORME AU TD)

1) $\left\{ F_{1 \rightarrow 2} \right\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & L_A \\ Y_A & \Pi_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{glissement}) \quad (\vec{x}_1 = \vec{x}_2)$

2) $\left\{ F_{2 \rightarrow 3} \right\}_S = \begin{Bmatrix} X_B & L_B \\ Y_B & \Pi_B \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{point d'axe } \vec{z}_c)$

3) ${}_1 \vec{a}_{A,2/1} = \frac{d}{dt} \left(\vec{V}_{A,2/1} \right)_A = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} (\vec{O}_1 A) \right)_1 = \ddot{x} \vec{x}_1$
 (Translation)

4. $\vec{a}_{G_3,3/1} = \frac{d}{dt} \left(\vec{V}_{G_3,3/1} \right)_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} (\vec{O}G_3) \right)_1$
 $= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} (\vec{O}A + \vec{A}B + \vec{B}G_3) \right)_1$
 $= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} (x \vec{x}_1 + h \vec{y}_1 - L_3 \vec{y}_3) \right)_1$
 $= \frac{d}{dt} \left(\ddot{x} \vec{x}_1 + L_3 \ddot{\theta} \vec{x}_3 \right)_1$

$\vec{a}_{G_3,3/1} = \ddot{x} \vec{x}_1 + L_3 \ddot{\theta} \vec{x}_3 + L_3 \ddot{\theta}^2 \vec{y}_3$

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}_{B,3/1} &= \vec{\sigma}_{G_3,3/1} + BG_3 \wedge \vec{v}_{G_3,3/1} \\
 &\downarrow \\
 &I_{G_3,3/1} \cdot \vec{\alpha}_{3/1} \qquad \leftarrow m_3 \vec{v}_{G_3,3/1} = m_3 (\dot{x} \vec{e}_1 + L_3 \dot{\theta} \vec{e}_3) \\
 \begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ & C_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} &= C_3 \ddot{\theta} \vec{e}_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{donc} \\ BG_3 \wedge \vec{v}_{G_3,3/1} = -L_3 \dot{y}_3 \wedge (m_3 \dot{x} \vec{e}_1 + L_3 \dot{\theta} \vec{e}_3) \\ = m_3 (\dot{x} L_3 \cos \theta \vec{e}_1 + L_3^2 \dot{\theta} \vec{e}_1) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\vec{\sigma}_{B,3/1} = C_3 \ddot{\theta} \vec{e}_1 + m_3 L_3^2 \ddot{\theta} \vec{e}_1 + m_3 \dot{x} L_3 \cos \theta \vec{e}_1$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}_{B,3/1} &= \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_{B,3/1}) + m_3 \vec{v}_{B/1} \wedge \vec{v}_{G_3,3/1} \\
 &\downarrow \\
 &= (C_3 + m_3 L_3^2) \ddot{\theta} \vec{e}_1 + m_3 \dot{x} L_3 \cos \theta \vec{e}_1 - m_3 \dot{x} \dot{\theta} L_3 \sin \theta \vec{e}_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} m_3 \dot{x} \vec{e}_1 \wedge (m_3 \dot{x} \vec{e}_1 + L_3 \dot{\theta} \vec{e}_3) \\ m_3 \dot{x} \dot{\theta} L_3 \sin \theta \vec{e}_1 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_{B,3/1} = \underbrace{(C_3 + m_3 L_3^2)}_{\text{on pourrait appeler ce terme } J_3 \text{ pour simplifier}} \ddot{\theta} \vec{e}_1 + m_3 \dot{x} L_3 \cos \theta \vec{e}_1$$

6) si on isole B on exploite la liaison pivot 3/2 et le moment autour de \vec{z}_1 , car B ne fait pas apparaître d'inconnues de liaisons.

DATÉ : $\{F_{g \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{matrix} mg \vec{y}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}$ $\{F_{2 \rightarrow 3}\}$ pivot B \vec{z}_1 .

Théorème du moment dynamique autour de B, \vec{z}_1 :

$$\vec{\sigma}_{B,3/1} \cdot \vec{z}_1 = \left(\begin{matrix} \vec{BG} \wedge -mg \vec{y}_1 \\ -L_3 \vec{y}_3 \end{matrix} \right) \cdot \vec{z}_1 + 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(C_3 + m_3 L_3^2)}_{J_3} \ddot{\theta} + m_3 \dot{x} L_3 \cos \theta = -mg L_3 \sin \theta \quad (1)$$

7.1) $\dot{x} > 0$ à $t=0$ nat $t=0, \theta=0$ donc $J_3 \ddot{\theta} = -m_3$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{m_3 L_3}{J_3} \dot{x} < 0 \text{ le Bar tourne vers l'arrière}$$

7.2) on isole $k+3$ et on utilise la glimère 1/2 !!
 (C) résultat dynamique sur \vec{x}_1 ne fait pas intervenir d'équations de liaisons.

BATE Au (d+3): $\{F_{g=3}\}, \{F_{g=2}\}, \{F_{g=1}\} + \text{Force à donner sur } \vec{x}_1$
 glimère \vec{x}_1

$\{D_{L+3/0}\} = \{D_{2/0}\} + \{D_{3/0}\}$
 soit TH de le résultat dynamique sur \vec{x}_1

$\vec{x}_1 (m_2 \vec{a}_{62/0} + m_3 \vec{a}_{63/0}) = (-m_3 g \vec{y}_1, -m_2 g \vec{y}_1) \cdot \vec{x}_1 + 0 + F$

$\vec{x}_1 \vec{x}_1 \quad \vec{x}_1 \vec{x}_1 + L_3 \ddot{\theta} \vec{x}_3 + L_3 \ddot{\theta}^2 \vec{y}_3$

donc $m_2 \ddot{x}_1 + m_3 (\ddot{x}_1 + L_3 \ddot{\theta} \cos \theta - L_3 \ddot{\theta}^2 \sin \theta) = 0 + F$
 action à donner par Boyer 2

avec $\ddot{\theta} = -\frac{m_3 L_3}{J_3} \ddot{x}_1 \quad \text{à } t=0$

$\Rightarrow \ddot{x}_1 \left(m_2 + m_3 - \frac{m_3 L_3^2}{J_3} \right) = F$

8) position stable $\theta_s \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 = \ddot{\theta}$

(1) dérivé alors: $m_3 \ddot{x}_1 \Delta \cos \theta = -m_3 g L_3 \sin \theta \Rightarrow \tan \theta = -\frac{\ddot{x}_1}{g}$

$\Rightarrow \theta_s = 5,8^\circ$ pour $\ddot{x}_1 = 1$

9) $\ddot{x}_1 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 = 0$

(1) dérivé alors $J_3 \ddot{\theta} = -m_3 g L_3 \sin \theta$ (pendule simple)
 en linéaire
 $J_3 \ddot{\theta} + m_3 g L_3 \theta = 0$ eq Harmonique
 \Rightarrow oscillations harmoniques

(période $\frac{2\pi}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{J_3}{m_3 g L}}$)

2 EXERCICE 2 : LE BEAU MANEGE (EN) (ATTENTION LA NUMEROTATION PEUT ETRE NON CONFORME A CELLE DU TD)

1.a. $\vec{\Omega}(3/R_1) = \vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/R_1) \Rightarrow \vec{\Omega}(3/R_1) = \dot{\theta} \cdot \vec{i}_2 + \dot{\phi} \cdot \vec{k}_1$
 b. $\vec{V}(M \in 3/R_1) = \vec{0}$. $\vec{V}(M \in 3/R_1) = \vec{V}(G \in 3/R_1) + \vec{\Omega}(3/R_1) \wedge \vec{GM} \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{L}{R} \dot{\phi}$
 alors $\vec{\Omega}(3/R_1) = \dot{\phi} \cdot \left(-\frac{L}{R} \cdot \vec{i}_2 + \vec{k}_1\right)$

2. Eléments cinétiques :

a. $\vec{P}(2/R_1) = m_2 \cdot \vec{V}(A \in 2/R_1) \Rightarrow \vec{P}(2/R_1) = \vec{0}$
 $\vec{\sigma}_A(2/R_1) = \vec{I}_A(2) \cdot \vec{\Omega}(2/R_1) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{A,B_2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = C_2 \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{k}_1$ donc $\vec{\sigma}_A(2/R_1) = C_2 \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{k}_1$
 b. $\vec{P}(3/R_1) = m_3 \cdot \vec{V}(G \in 3/R_1) \Rightarrow \vec{P}(3/R_1) = m_3 L \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{j}_2$

$\vec{\sigma}_G(3/R_1) = \vec{I}_G(3) \cdot \vec{\Omega}(3/R_1) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix}_{G,B_3} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{L}{R} \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\sigma}_G(3/R_1) = -A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{i}_2 + B_3 \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{k}_1$
B₃ φ sin θ y₃ + B₃ φ cos θ z₃ idem

Nota : (3) étant de révolution et sa rotation propre $\dot{\theta}$ ayant lieu autour de son axe de révolution x_2 , le calcul précédent donne les mêmes résultats qu'il soit effectué dans B_3 (base liée à (3)) ou dans B_2 (base liée à son axe de révolution). C'est donc dans B_2 qu'il est plus commode d'effectuer les calculs car l'expression de $\vec{\Omega}(3/R_1)$ est plus simple dans B_2 que dans B_3 .

$\vec{\sigma}_A(3/R_1) = \vec{\sigma}_G(3/R_1) + m_3 \cdot \vec{V}(G \in 3/R_1) \wedge \vec{GA}$
 $\Rightarrow \vec{\sigma}_A(3/R_1) = -A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{i}_2 + (B_3 + m_3 \cdot L^2) \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{k}_1$

3. Eléments dynamiques :

a. $\vec{Rd}(2/R_1) = m_2 \cdot \vec{\Gamma}(A \in 2/R_1) \Rightarrow \vec{Rd}(2/R_1) = \vec{0}$
 $\vec{\delta}_A(2/R_1) = \left[\frac{d(\vec{\sigma}_A(2/R_1))}{dt} \right]_{R_1} \Rightarrow \vec{\delta}_A(2/R_1) = C_2 \cdot \ddot{\phi} \cdot \vec{k}_1$

$$b. \overline{Rd}(3/R_1) = \left[\frac{d(\overline{P}(3/R_1))}{dt} \right]_{R_1} \Rightarrow \overline{Rd}(3/R_1) = -m_3 \cdot L \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \vec{i}_2 + m_3 \cdot L \cdot \ddot{\varphi} \cdot \vec{j}_2$$

$$\overline{\delta}_G(3/R_1) = \left[\frac{d(\overline{\sigma}_G(3/R_1))}{dt} \right]_{R_1} \Rightarrow \overline{\delta}_G(3/R_1) = -A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{i}_2 - A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \vec{j}_2 + B_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{k}_1$$

Pour $\overline{\delta}_A(3/R_1)$, deux méthodes :

- soit le changement de point en partant de $\overline{\delta}_G(3/R_1)$: $\overline{\delta}_A(3/R_1) = \overline{\delta}_G(3/R_1) + m_3 \cdot \overline{\Gamma}(G \in 3/R_1) \wedge \overline{GA}$,

- soit $\overline{\delta}_A(3/R_1) = \left[\frac{d(\overline{\sigma}_A(3/R_1))}{dt} \right]_{R_1} + m_3 \cdot \overline{V}(A/R_1) \wedge \overline{V}(G \in 3/R_1)$.

Comme $\overline{V}(A/R_1) = \vec{0}$ cette méthode est ici la plus rapide :

$$\Rightarrow \overline{\delta}_A(3/R_1) = -A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{i}_2 - A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \vec{j}_2 + (B_3 + m_3 \cdot L^2) \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{k}_1$$

$$4. a. \{\mathfrak{S}(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_1}, \quad b. \{\mathfrak{S}(2 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X_G & 0 \\ Y_G & M_G \\ Z_G & N_G \end{Bmatrix}_{G, B_2}, \quad c. \{\mathfrak{S}(1 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X_M & 0 \\ Y_M & 0 \\ Z_M & 0 \end{Bmatrix}_{M, B_2}$$

5. Inconnues de liaison en M.

a. S'il se produit un glissement en M, la vitesse de glissement $\overline{V}(M \in 3/R_1)$ a alors pour direction y_2 (démonstration voir ci-dessous) donc, d'après les lois de Coulomb, $\overline{R}(1 \rightarrow 3)$ ne peut être que dans le plan $(M, y_2, z_2) \Rightarrow X_M = 0$

Dém. : $\overline{V}(M \in 3/R_1) = \overline{V}(G \in 3/R_1) + \overline{\Omega}(3/R_1) \wedge \overline{GM} = L \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{j}_2 + (\dot{\varphi} \cdot \vec{k}_1 + \dot{\theta} \cdot \vec{i}_2) \wedge -R \cdot \vec{k}_1$

$\Rightarrow \overline{V}(M \in 3/R_1) = (L \cdot \dot{\varphi} + R \cdot \dot{\theta}) \vec{j}_2$. C.q.f.d.

b. Y_M ? Isoler (3).

$$\{\mathfrak{S}(2 \rightarrow 3)\} + \{\mathfrak{S}(\text{pesanteur} \rightarrow 3)\} + \{\mathfrak{S}(1 \rightarrow 3)\} = \{\mathfrak{D}(3/R_1)\}.$$

Compte tenu de la forme du torseur $\{\mathfrak{S}(2 \rightarrow 3)\}$, la seule équation scalaire qui ne fait pas intervenir les inconnues de cette liaison est la projection sur x_2 du moment dynamique de (3) exprimé en G. Le moment de la pesanteur n'a pas d'effet suivant cette direction.

$$\Rightarrow Y_M \cdot R = \overline{\delta}_G(3/R_1) \cdot \vec{i}_2 \Rightarrow Y_M = -A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \ddot{\varphi} \quad \text{expression négative si } \ddot{\varphi} \text{ est positif (voir$$

figure-réponse).

c. Z_M ? Isoler l'ensemble [(2), 4 roues (3)].

$$\{\mathfrak{S}(1 \rightarrow 2)\} + \{\mathfrak{S}(\text{pesanteur} \rightarrow 2)\} + \{\mathfrak{S}(\text{pesanteur} \rightarrow 3)\} + \{\mathfrak{S}(1 \rightarrow 3)\} = \{\mathfrak{D}(2/R_1)\} + \{\mathfrak{D}(3/R_1)\}$$

Compte tenu de la forme du torseur $\{\mathfrak{S}(1 \rightarrow 2)\}$, deux équations scalaires ne font pas intervenir les inconnues de cette liaison. Pour ce qui nous intéresse, la projection sur z_1 de la résultante dynamique de l'ensemble [(2), (3)] permet de faire intervenir l'inconnue Z_M recherchée :

$$\Rightarrow 4 \cdot Z_M - (m_2 + 4 \cdot m_3) \cdot g = [\overline{Rd}(2/R_1) + 4 \cdot \overline{Rd}(3/R_1)] \cdot \vec{k}_1 \Rightarrow Z_M = \left(\frac{m_2}{4} + m_3 \right) \cdot g$$

e. L'angle β que fait la résultante avec la normale au contact en M est tel que $\tan \beta = \frac{-Y_M}{Z_M}$ ($Y_M < 0$, $Z_M > 0$ alors β est positif et orienté selon $+x_2$, pour déterminer l'expression de la

$$\text{tangente il faut donc prendre } (-Y_M). \quad \tan \beta = \frac{-A_3 \cdot \frac{L}{R} \cdot \ddot{\varphi}}{\left(\frac{m_2}{4} + m_3 \right) \cdot g}$$

Condition d'adhérence $|Y_m| \leq f \cdot |Z_m|$ on peut aussi remplacer $f = \tan \beta$

$$\text{Donc } A_3 \cdot \frac{L}{R^2} \ddot{\varphi} \leq f \left(\frac{m_2}{4} + m_3 \right) g \rightarrow \ddot{\varphi} \leq f \frac{\left(\frac{m_2}{4} + m_3 \right) g}{A_3 \cdot \frac{L}{R^2}}$$

AN avec $f = 0,5 \rightarrow \ddot{\varphi} \leq 86 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$ le cas max serait $f = \tan \beta = 1$ soit $\ddot{\varphi} \leq 171,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$

6.a. \mathcal{C}_m ? Isoler l'ensemble [(2), 4 roues (3)].

$$\{\mathfrak{M}(1 \rightarrow 2)\} + \{\mathfrak{M}(\text{pesanteur} \rightarrow 2)\} + \{\mathfrak{M}(\text{pesanteur} \rightarrow 3)\} + \{\mathfrak{M}(1 \rightarrow 3)\} = \{\mathfrak{D}(2/R_1)\} + \{\mathfrak{D}(3/R_1)\}$$

Compte tenu de la forme du torseur $\{\mathfrak{M}(1 \rightarrow 2)\}$, la projection sur z_1 du moment dynamique de l'ensemble [(2), 4x(3)] exprimé en A ne fait pas intervenir les inconnues de cette liaison entre (2) et (1). Le moment de la pesanteur n'a pas d'effet suivant cette direction.

$$\Rightarrow \mathcal{C}_m + 4LY_M = \bar{\delta}_A(2/R_1) \cdot \vec{k}_1 + 4 \cdot \bar{\delta}_A(3/R_1) \cdot \vec{k}_1 \Rightarrow \mathcal{C}_m = \left[C_2 + 4 \cdot (B_3 + m_3 \cdot L^2 + A_3 \cdot \frac{L^2}{2}) \right] \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\text{A.N : } \mathcal{C}_m < \underline{69,4 \text{ m.N.}}$$

$$\text{b. } \mathcal{C}_m = C_T \cdot \ddot{\varphi} \Rightarrow C_T = C_2 + 4 \cdot (B_3 + m_3 \cdot L^2 + A_3 \cdot \frac{L^2}{2}) \quad \text{A.N : } C_T = \underline{0,524 \text{ kg.m}^2}$$

3 EXERCICE 3 : EPAS ANALYSE DU SYSTEME DE MANŒUVRE DU PARC ECHELLE (CCP 2007)

1. G centre de gravité de 5 donc, $\bar{\sigma}_{G,50} = [I(5)] \bar{\Omega}_{50} = \begin{bmatrix} I_{Gx} \\ I_{Gy} \\ I_{Gz} \end{bmatrix}_{b_5} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 = I_{Gz} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}$

$$\bar{\sigma}_{A,50} = \bar{\sigma}_{G,50} + \vec{AG} \wedge 3m \vec{V}_{G,50} = \bar{\sigma}_{G,50} + \vec{AG} \wedge 3m \left[\vec{GA} \wedge \bar{\Omega}_{50} \right] = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{Gz} \dot{\theta} \end{vmatrix}_{b_5} + 3m \begin{vmatrix} \frac{L}{2} - d \\ \frac{h}{3} \\ 0 \end{vmatrix}_{b_5} \wedge - \begin{vmatrix} \frac{L}{2} - d \\ \frac{h}{3} \\ 0 \end{vmatrix}_{b_5} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{b_5}$$

$$\bar{\sigma}_{A,50} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{Gz} \dot{\theta} \end{vmatrix}_{b_5} + 3m \begin{vmatrix} \frac{L}{2} - d \\ \frac{h}{3} \\ 0 \end{vmatrix}_{b_5} \wedge - \begin{vmatrix} \frac{L}{2} - d \\ \frac{h}{3} \\ 0 \end{vmatrix}_{b_5} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{b_5} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{Gz} \dot{\theta} \end{vmatrix}_{b_5} + 3m \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \dot{\theta} \end{vmatrix}_{b_5}$$

$$\bar{\sigma}_{A,50} = \left[I_{Gz} + 3m \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \dot{\theta} \vec{z}_0. \quad \text{Or A est fixe dans le mouvement de 5/0, donc :}$$

$$\vec{\delta}_{A,50} = \left[\frac{d\bar{\sigma}_{A,50}}{dt} \right]_0 = \left[I_{Gz} + 3m \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \ddot{\theta} \vec{z}_0$$

→ Ce que l'on retrouve bien sur, en utilisant Huygens :

$$\vec{\delta}(A,5/0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}(A,5/0)}{dt} \right]_{R_0}$$

$$\vec{\sigma}(A,5/0) = I(A,5) \cdot \bar{\Omega}(5/0) = \begin{bmatrix} I_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Az} \end{bmatrix}_{(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = I_{Az} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0$$

$$\text{avec } I_{Az} = I_{Gz} + 3 \cdot m \cdot \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right]$$

$$\vec{\sigma}(A,5/0) = \left[I_{Gz} + 3 \cdot m \cdot \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \quad \text{D'où } \vec{\delta}(A,5/0) = \left[I_{Gz} + 3 \cdot m \cdot \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_0$$

2. La plate-forme restant toujours horizontale, elle est animée d'un mouvement de translation (circulaire), on en déduit donc $\vec{\delta}_{G_p,60} = \vec{0}$.

$$\vec{\delta}_{A,60} = \vec{\delta}_{G_p,60} + \overrightarrow{AG_p} \wedge \vec{M} \vec{a}_{G_p,60}$$

Or $\overrightarrow{AG_p} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG_p} = H \vec{x}_5 + \lambda \vec{x}_0 + \mu \vec{y}_0$,

d'où, $\vec{V}_{G_p,60} = \left[\frac{d\overrightarrow{AG_p}}{dt} \right]_0 = H\dot{\theta} \vec{y}_5$, et $\vec{a}_{G_p,60} = \left[\frac{d\vec{V}_{G_p,60}}{dt} \right]_0 = H\ddot{\theta} \vec{y}_5 - H\dot{\theta}^2 \vec{x}_5$

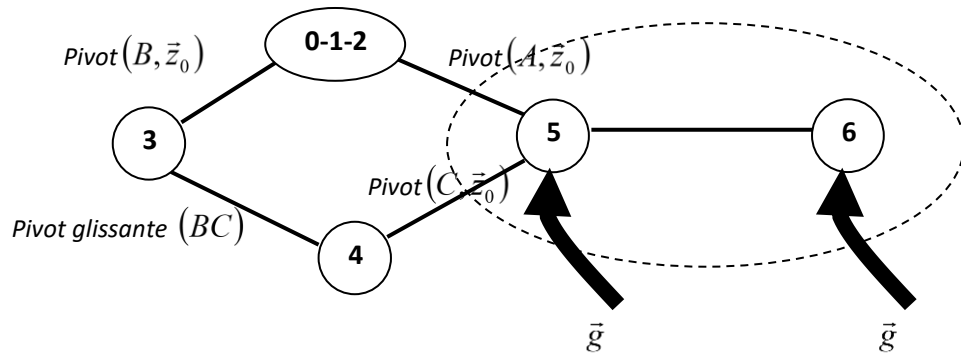
Soit en effectuant le calcul dans la base 5 :

$$\vec{\delta}_{A,60} = M \begin{vmatrix} H + \lambda \cos\theta + \mu \sin\theta & -H\dot{\theta}^2 \\ -\lambda \sin\theta + \mu \cos\theta & H\ddot{\theta} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{z}_0 = M \left[H\ddot{\theta}(H + \lambda \cos\theta + \mu \sin\theta) + H\dot{\theta}^2(-\lambda \sin\theta + \mu \cos\theta) \right] \vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_{A,60} = M \left[H\ddot{\theta}(H + \lambda \cos\theta + \mu \sin\theta) + H\dot{\theta}^2(-\lambda \sin\theta + \mu \cos\theta) \right] \vec{z}_0$$

3. Les deux questions précédentes invitent clairement à isoler l'ensemble {5 + 6} et à appliquer le théorème du moment dynamique en A. Le graphe des liaisons complété des actions mécaniques extérieures représentées ci-dessous, permettrait de s'en rendre compte.

Inventaire des actions mécaniques extérieures :



- 0 sur 5 : $\vec{M}_A(0 \rightarrow 5)_{\vec{z}_0} = 0$, c'est pour cela qu'il faut écrire le théorème du moment en A (pas d'inconnues de liaisons dans l'expression)
- Vérin 4 sur 5 : d'après l'énoncé c'est un glisseur de résultante $\vec{R} = R \vec{y}_3$. Le point d'application n'étant pas donné on peut le justifier par l'isolement de 3+4 et le fait que leurs masses sont négligées (donc pas d'effet inertie). Ensemble soumis à 2 forces idem qu'en statique, opposées alignées donc avec (BC). On a donc $\vec{M}_A(0 \rightarrow 5)_{\vec{z}_0} = \underbrace{\vec{M}_C(0 \rightarrow 5)_{\vec{z}_0}}_0 + (\overrightarrow{AC} \wedge R \vec{y}_3)_{\vec{z}_0} = cR(\vec{x}_5 \wedge \vec{y}_3)_{\vec{z}_0} = cR(\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_5)_{\vec{y}_3} = cR(\vec{y}_5 \cdot \vec{y}_3) = cR \cos(\theta - \dots)$

- \vec{g} sur 5 : $\vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 5)_{\vec{z}_0} = \underbrace{\vec{M}_G(\vec{g} \rightarrow 5)_{\vec{z}_0}}_0 + (\overrightarrow{AG} \wedge -3mg \vec{y}_0)_{\vec{z}_0} = -3mg(\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0)_{\vec{AG}}$

$$\vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 5)_{\vec{z}_0} = -3mg \vec{x}_0 \cdot \overrightarrow{AG} = -3mg \left[\left(\frac{L}{2} - d \right) \cos\theta + \frac{h}{3} \sin\theta \right]$$

- (A_i) sur 6 : $\vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 6)_{\vec{z}_0} = \underbrace{\vec{M}_{G_p}(\vec{g} \rightarrow 6)_{\vec{z}_0}}_0 + (\overrightarrow{AG_p} \wedge -Mg \vec{y}_0)_{\vec{z}_0} = -Mg(\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0)_{\vec{AG_p}}$
 $\vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 5)_{\vec{z}_0} = -Mg \vec{x}_0 \cdot \overrightarrow{AG_p} = -Mg [H \cos\theta + \lambda]$

Théorème du moment dynamique à l'ensemble (5+6) en projection sur (A, \vec{z}_0) :

$$\left[I_{G_z} + 3m \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \ddot{\theta} + M \left[H \ddot{\theta} (H + \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) + H \dot{\theta}^2 (-\lambda \sin \theta + \mu \cos \theta) \right] =$$

$$cR \cos(\theta - \beta) - 3mg \left[\left(\frac{L}{2} - d \right) \cos \theta + \frac{h}{3} \sin \theta \right] - Mg [H \cos \theta + \lambda]$$

Soit l'expression de l'effort des vérins :

$$R = \frac{\left[I_{G_z} + 3m \left[\left(\frac{L}{2} - d \right)^2 + \frac{h^2}{9} \right] \right] \ddot{\theta} + M \left[H \ddot{\theta} (H + \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) + H \dot{\theta}^2 (-\lambda \sin \theta + \mu \cos \theta) \right] + 3mg \left[\left(\frac{L}{2} - d \right) \cos \theta + \frac{h}{3} \sin \theta \right] + Mg [H \cos \theta + \lambda]}{c \cos(\theta - \beta)}$$

4 EXERCICE 4 : VEHICULE TIM

A - Détermination du coefficient de résistance au roulement

Q.1. On isole le solide 1 et on effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME). On applique le Principe Fondamental de la Statique (PFS) au solide 1 en G.

Théorème de la résultante statique :

$$\text{En projection sur } \vec{x} : -T_{01} + m.g.\sin\alpha = 0$$

$$\text{En projection sur } \vec{z} : N_{01} - m.g.\cos\alpha = 0$$

Théorème du moment statique :

$$\text{En projection sur } \vec{y} : R.T_{01} - C_r = 0$$

Q.2. A la limite du roulement on a $C_r = r.N_{01}$

$$\rightarrow R.T_{01} - r.N_{01} = 0 \rightarrow R.m.g.\sin\alpha_{\text{lim}} - r.m.g.\cos\alpha_{\text{lim}} = 0 \rightarrow R.m.g.\sin\alpha_{\text{lim}} - r.m.g.\cos\alpha_{\text{lim}} = 0$$

$$\rightarrow \tan\alpha_{\text{lim}} = \frac{r}{R}$$

Q.3. On incline le plan jusqu'à obtenir roulement de la roue \rightarrow on obtient expérimentalement α_{lim} .

Pour $\tan\alpha_{\text{lim}} = 0,008$ et $R = 0,25$ m on a donc $r = R.\tan\alpha_{\text{lim}} = 0,25 \times 0,008 = 0,002$ m.

Q.4. Loi de Coulomb en phase d'adhérence on a $T_{01} \leq f.N_{01}$. Il faut donc déterminer le rapport $\frac{T_{01}}{N_{01}}$:

$$\text{On a } T_{01} = m.g.\sin\alpha \text{ et } N_{01} = m.g.\cos\alpha \rightarrow \frac{T_{01}}{N_{01}} = \frac{m.g.\sin\alpha}{m.g.\cos\alpha} = \tan\alpha$$

Pour $\alpha = \alpha_{\text{lim}}$ on a donc $\frac{T_{01}}{N_{01}} = 0,008 < 0,5 \rightarrow$ Il y a roulement mais non glissement de la roue.

B - Modélisation du véhicule

Q.5. Condition de Roulement Sans Glissement (RSG) au point A_{23} : $\vec{V}_{A_{23},23/0} = \vec{0}$

Condition de RSG au point A_4 : $\vec{V}_{A_4,4/0} = \vec{0}$

$$\vec{V}_{A_{23},23/0} = \vec{0} \rightarrow \vec{V}_{A_{23},23/1} + \vec{V}_{A_{23},1/0} = \vec{0} \rightarrow -R.\dot{\theta}_{23} + \dot{x} = 0$$

$$\vec{V}_{A_4,4/0} = \vec{0} \rightarrow \vec{V}_{A_4,4/1} + \vec{V}_{A_4,1/0} = \vec{0} \rightarrow -R.\dot{\theta}_4 + \dot{x} = 0$$

Q.6. On isole l'ensemble $E=1+2-3+4$, on effectue le BAME et on applique le PFD sur E.

Théorème de la résultante dynamique : $\overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E}} = \overrightarrow{R_{d E/R}}$

Avec $\overrightarrow{R_{d E/R}} = \overrightarrow{R_{d E/0}} = \overrightarrow{R_{d 1/0}} + \overrightarrow{R_{d 23/0}} + \overrightarrow{R_{d 4/0}}$

$\overrightarrow{R_{d 1/0}} = M \cdot \overrightarrow{a_{G_1, 1/0}} = M \cdot \ddot{\vec{x}}$

$\overrightarrow{R_{d 23/0}} = M \cdot \overrightarrow{a_{O_{23}, 23/0}} = 2 \cdot m \cdot \ddot{\vec{x}}$ (O_{23} est cdg de 23)

$\overrightarrow{R_{d 23/0}} = m \cdot \overrightarrow{a_{O_4, 4/0}} = m \cdot \ddot{\vec{x}}$ (O_4 est cdg de 4)

$\rightarrow \overrightarrow{R_{d E/R}} = (M + 3 \cdot m) \cdot \ddot{\vec{x}}$

Théorème de la résultante dynamique :

En projection sur \vec{x} : $-\overline{T_{023}} - \overline{T_{04}} + (M + 3 \cdot m) \cdot g \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_x \cdot \dot{x}^2 = (M + 3 \cdot m) \cdot \ddot{x}$

En projection sur \vec{z} : $\overline{N_{023}} + \overline{N_{04}} - (M + 3 \cdot m) \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$

Q.7. On isole l'ensemble roue 23, on effectue le BAME et on applique le PFD sur 23 en O_{23} .

Théorème de la résultante dynamique en O_{23} en projection sur \vec{y} : $\overrightarrow{\delta_{O_{23}, 23/0}} \cdot \vec{y} = \overrightarrow{M_{O_{23}(\vec{23} \rightarrow 23)}} \cdot \vec{y}$

Avec $\overrightarrow{\delta_{O_{23}, 23/0}} = \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{O_{23}, 23/0}} \right|_0$ car O_{23} centre de gravité de 23 et $\overrightarrow{\sigma_{O_{23}, 23/0}} = I_{O_{23}}(23) \cdot \overrightarrow{\Omega_{23/0}}$ car O_{23} centre de gravité de 23 $\rightarrow \overrightarrow{\delta_{O_{23}, 23/0}} \cdot \vec{y} = 2 \cdot I \cdot \ddot{\theta}_{23}$.

$\rightarrow 2 \cdot I \cdot \ddot{\theta}_{23} = -\overline{N_{023}} \cdot r + \overline{T_{023}} \cdot R$

On isole la roue 4, on effectue le BAME et on applique le PFD sur 4 en O_4 .

Théorème de la résultante dynamique en O_4 en projection sur \vec{y} : $\overrightarrow{\delta_{O_4, 4/0}} \cdot \vec{y} = \overrightarrow{M_{O_4(\vec{4} \rightarrow 4)}} \cdot \vec{y}$

Avec $\overrightarrow{\delta_{O_4, 4/0}} = \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{O_4, 4/0}} \right|_0$ car O_4 centre de gravité de 4 et $\overrightarrow{\sigma_{O_4, 4/0}} = I_{O_4}(4) \cdot \overrightarrow{\Omega_{4/0}}$ car O_4 centre de gravité de 4 $\rightarrow \overrightarrow{\delta_{O_4, 4/0}} \cdot \vec{y} = I \cdot \ddot{\theta}_4$.

$\rightarrow I \cdot \ddot{\theta}_4 = -\overline{N_{04}} \cdot r + \overline{T_{04}} \cdot R + C_m$

Q.8. $-\overline{T_{023}} - \overline{T_{04}} + (M + 3 \cdot m) \cdot g \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_x \cdot \dot{x}^2 = (M + 3 \cdot m) \cdot \ddot{x}$

$\overline{N_{023}} + \overline{N_{04}} - (M + 3 \cdot m) \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$

$2 \cdot I \cdot \ddot{\theta}_{23} = -\overline{N_{023}} \cdot r + \overline{T_{023}} \cdot R$

$I \cdot \ddot{\theta}_4 = -\overline{N_{04}} \cdot r + \overline{T_{04}} \cdot R + C_m$

$-\overline{R} \cdot \dot{\theta}_{23} + \dot{x} = 0$

$-\overline{R} \cdot \dot{\theta}_4 + \dot{x} = 0$

$C_m = \overline{N_{04}} \cdot r - \overline{T_{04}} \cdot R + I \cdot \ddot{\theta}_4$

$\overline{N_{04}} = (M + 3 \cdot m) \cdot g \cdot \cos \alpha - \overline{N_{023}}$

$\rightarrow C_m = (M + 3 \cdot m) \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot r - \overline{N_{023}} \cdot r - \overline{T_{04}} \cdot R + I \cdot \ddot{\theta}_4$

$$2.l.\ddot{\theta}_{23} - T_{023}.R = -N_{023}.r$$

$$\rightarrow C_m = (M+3.m).g.\cos\alpha.r + 2.l.\ddot{\theta}_{23} - T_{023}.R - T_{04}.R + l.\ddot{\theta}_4$$

$$-T_{023} - T_{04} = (M+3.m).\ddot{x} - (M+3.m).g.\sin\alpha + \frac{1}{2}\rho.S.C_x.\dot{x}^2$$

$$\rightarrow C_m = (M+3.m).g.\cos\alpha.r + 2.l.\ddot{\theta}_{23} + l.\ddot{\theta}_4 + R.\left[(M+3.m).\ddot{x} - (M+3.m).g.\sin\alpha + \frac{1}{2}\rho.S.C_x.\dot{x}^2\right]$$

$$\dot{\theta}_{23} = \frac{\dot{x}}{R} \rightarrow \ddot{\theta}_{23} = \frac{\ddot{x}}{R} \text{ et } \dot{\theta}_4 = \frac{\dot{x}}{R} \rightarrow \ddot{\theta}_4 = \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$\rightarrow C_m = (M+3.m).g.\cos\alpha.r + 2.l.\frac{\ddot{x}}{R} + l.\frac{\ddot{x}}{R} + R.(M+3.m).\ddot{x} - R.(M+3.m).g.\sin\alpha + \frac{1}{2}R.\rho.S.C_x.\dot{x}^2$$

$$\rightarrow C_m = (M+3.m).g.\cos\alpha.r + \left[\frac{3.l}{R} + R.(M+3.m)\right].\ddot{x} - R.(M+3.m).g.\sin\alpha + \frac{1}{2}R.\rho.S.C_x.\dot{x}^2$$

Q.9. D'après l'équation scalaire obtenue question précédente le couple moteur peut se décomposer comme étant « C_m = couple pour vaincre la résistance au roulement + couple pour vaincre les effets inertiels du véhicule – couple lié au binôme poids/pente + couple pour vaincre l'action du vent sur le véhicule ».

Q.10. A vitesse constante sur une piste horizontale on obtient : $C_m = (M+3.m).g.r + \frac{1}{2}R.\rho.S.C_x.\dot{x}^2$.

Q.11. Pour $t = 500$ s on est à vitesse constante $\rightarrow \dot{x} = 16$ m/s $\rightarrow \frac{1}{2}\rho.S.C_x = \frac{C_m - (M+3.m).g.r}{R.\dot{x}^2}$

A.N. : $\frac{1}{2}\rho.S.C_x = \frac{3,245 - (70 + 3 \times 1).10 \times 0,002}{0,25 \times 16^2} = 0,028$ kg/m

Q.12. A vitesse constante de 5 km/h = 1,39 m/s et en négligeant la résistance au roulement, on obtient

l'expression de l'angle α : $\sin\alpha = \frac{C_m - \frac{1}{2}R.\rho.S.C_x.\dot{x}^2}{-R.(M+3.m).g}$

A.N. : $\alpha = \arcsin \frac{3,245 - \frac{1}{2} \times 0,25 \times 0,028 \times 1,39^2}{-0,25 \times (70 + 3 \times 1).10} = -1^\circ$

Ce qui correspond, compte tenu du paramétrage, à une pente à gravir de 1° .

5 EXERCICE 5 : CONTROLE DE CHUTE EVENTUELLE D'UN ASCENSEUR

Question 1. Forme de cette matrice d'inertie.

Une matrice d'inertie est symétrique.

Le plan $(B, \vec{x}_B, \vec{y}_B)$ est plan de symétrie matérielle du balancier donc $D = \iiint yz \, dm = 0$ et $E = \iiint xz \, dm = 0$

Question 2. Moment dynamique du balancier en B dans son mouvement par rapport au bâti : $\vec{\delta}_{\text{balancier/bâti}}^B$ (le porte-balancier est fixe). On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_B)$.

B est un point fixe donc : $\vec{\delta}_{\text{balancier/bâti}}^B = \left(\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{\text{balancier/bâti}}^B \right)_R$

$$\text{et } \vec{\sigma}_{\text{balancier/bâti}}^B = [I_B(\text{balancier})] \vec{\Omega}(\text{balancier/bâti}) = \begin{bmatrix} J_x & -F & 0 \\ -F & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = J_z \dot{\theta} \vec{z}$$

$$\text{donc } \vec{\delta}_{\text{balancier/bâti}}^B = J_z \ddot{\theta} \vec{z}$$

Question 3. On isole S={ balancier + le galet}.

Bilan des actions mécaniques exercées sur l'ensemble S:

- Action de la came sur le galet (intensité nulle au moment de la rupture du contact galet came.
- Liaison pivot d'axe (B, \vec{z}) entre le porte balancier et le balancier.
- Action du ressort sur le balancier exerçant un couple supposé constant C_{ressort} autour de (B, \vec{z}) .
- Action de la pesanteur négligée

On applique le théorème du moment dynamique en B en projection sur \vec{z} .

$$\sum M_{\vec{S} \rightarrow S}^B \cdot \vec{z} = \vec{\delta}_{S/bâti}^B \cdot \vec{z}$$

$$C_{\text{ressort}} = J_z \ddot{\theta}_{\text{lim}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\ddot{\theta}_{\text{lim}} = \frac{C_{\text{ressort}}}{J_z}}$$

Hypothèse : Si $\omega = cste$ alors on supposera $\theta = \theta_0 \sin(4\omega t)$.

Question 4. Au vu des courbes, valider cette hypothèse et déterminer θ_0 en degrés.

Q4) Sur le graphique, on peut observer une courbe sinusoïdale centrée sur l'axe des abscisses avec 4 périodes pour 1 seconde. La courbe est tracée pour $\omega = 1 \text{ tour/s} = 2\pi \text{ rad/s}$.

Donc $\theta = \theta_0 \sin(4\omega t)$ avec $\theta_0 = 8,5^\circ$

Q5) $\theta^{\circ} = -16\omega^2 \theta_0 \sin 4\omega t$ ωt maxi pour $\sin 4\omega t = -1$; $\theta^{\circ}_{\text{maxi}} = 16\omega^2 \theta_0$ soit $\omega_{\text{limite}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{C_{\text{ress}}}{J_z \theta_0}}$ avec $\theta_0 = 0,15 \text{ rd}$