Corrigé partiel du TD 19 : Séries Entières (I)

Exercice 1 :
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :
a) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{3n}}{2n!}$. b) $\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n} z^{2n}$. c) $\sum_{n\geq 1} \ln(n)x^n$ (par encadrement).
d) $\sum_{n\geq 1} H_n x^n$. e) $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, où a_n est la n-ième décimale de $\frac{1}{2024}$.
f) $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n\alpha)x^n}{n!}$, où α est un réel (Reconnaître la somme).
g) $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, où (a_n) est une suite convergeant vers 2025. h) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n z^{2n}}{n!}$.
i) $\sum_{n\geq 0} n! x^{n!}$. j) $\sum_{n\geq 1} (1+\frac{(-1)^n}{2n})^n x^n$. k) $\sum_{n\geq 0} tr(A^n)z^n$, où $A \in M_p(\mathbb{C})$.

Solution :
Les coefficients des séries entières sont notés a_n pour simplifier et R désignera le rayon de convergence à déterminer
a) La série entière est lacunaire, ce qui interdit un emploi direct de la règle de d'Alembert pour les S.E.
On observe que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2n!} \text{ si n est multiple de 3} \\ 0 \text{sinon} \end{cases}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a donc $|a_n z^n| \leq \frac{|z^3|^n}{n!}$; on reconnaît en le terme majorant celui d'une série exponentielle qui converge notoirement; ainsi par comparaison notre série entière converge absolument donc converge pour tout complexe z. $\boxed{R = +\infty}$ □
b) Même constat négatif sur d'Alembert mais on remarque que $a_n \leq n$ (pour $n \geq 1$); ce qui implique que $R \geq 1$ par propriété des rayons de convergence. La suite (a_n) n'étant pas bornée on a aussi $R \leq 1$ soit $\boxed{R = 1}$ □
d) L'équivalent usuel $H_n \sim \ln(n)$ pour $n \to +\infty$ montre (cf c) traité en classe) que $\boxed{R = 1}$ □
f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq \frac{1}{n!}$ donc $\boxed{R = +\infty}$
Pour tout réel x, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)x^n}{n!} = \Re(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\exp(i\alpha))^n}{n!}) = \Re(\exp(x\exp(i\alpha))$ donc la somme cherchée vaut $\exp(x\cos(\alpha))\cos(x\sin(\alpha))$ □
g) Puisque $a_n \sim 2025$, R est le rayon de convergence de la série entière dont tous les coefficients valent 2025 qui vaut aussi (propriété des rayons de convergence) celui de $\sum_{n\geq 0} x^n$ dont on sait qu'il vaut 1. $\boxed{R = 1}$ □
h) L'emploi direct de la règle de d'Alembert pour les S.E se révèle impossible.
On suppose $z \neq 0$ et on pose $u_n = \frac{n^n |z|^{2n}}{n!} > 0$ puis on observe (avec Stirling) que $u_n \sim \frac{(e|z|^2)^n}{\sqrt(2\pi n}$ qui ne converge que si $e|z|^2 < 1$; on en déduit que $\boxed{R = \frac{1}{\sqrt{e}}}$ □
i) On a $a_n \leq n$ (pour $n \geq 1$), ce qui implique que $R \geq 1$ par propriété des rayons de convergence. La suite (a_n) n'étant pas bornée on a aussi $R \leq 1$ soit $\boxed{R = 1}$ □
j) Les limites des suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont e et e^{-1}, il vient donc par encadrement APCR que $\boxed{R = 1}$ □
k) Puisqu'on travaille sur $\mathbb{C}$ et, en notant $\lambda_1, ...\lambda_s$ les valeurs propres (distinctes), χ_A est scindé et donc, avec n_i multiplicité de λ_i, il vient $tr(A^n) = \sum_{i=1}^{s} n_i \lambda_i^n$. En posant, pour $1 \leq i \leq s$, $t_i = |\lambda_i|$ et sachant que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} n_i \lambda_i^n z^n$ est $\frac{1}{t_i} = R_i$ (donc $+\infty$ si $\lambda_i = 0$), nous pouvons affirmer que

$\boxed{\rho(\sum_{n\geq 0} a_n z^n) \geq \min_{1\leq i\leq s} R_i}$. Il y a même égalité (cf cours) si les R_i sont deux à eux distincts■

....

....

Exercice 2 : (CCINP)

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cosh(n)}{n} x^n$.

Exercice 3 :

Soient les suites (u_n) et (v_n) régies par $u_0 = v_0 = 1$ et, pour tout entier n, par :

$$(\bigstar)\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

a) Montrer que les séries entières $\sum_{n\geq 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n x^n$ ont même rayon de convergence, noté R.

b) En traduisant matriciellement $(\bigstar)$, déterminer (u_n) puis R.

c) Donner une expression de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$, pour $x \in]-R, R[$

Exercice 4 :

On se donne une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, de rayon de convergence R non nul.

Conjecturer la valeur du rayon de convergence, noté r, de $\sum_{n\geq 0} a_{n^2} x^n$. Prouver votre conjecture.

Solution :

On a l'équivalence suivante $(a_n x^n)$ bornée $\Longleftrightarrow$ $(a_{n^2}(x^2)^n)$ bornée.

Ceci montre que $r = R^2$ (par double inégalité)■

Exercice 5 : ($\star\star$: Enfer ou Paradis des concours)

a) Soit(a_n) une suite de complexes non nuls telle que $\dfrac{a_{n+3}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \dfrac{1}{64}$.

Que pouvez-vous dire du rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$? (Mines)

b) Soit(a_n) une suite de complexes, on pose (pour tout n) $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Comparer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \dfrac{A_n}{n!} x^n$. (X - ESPCI)

c) On désigne (pour tout $n \geq 1$) par a_n le nombre de permutations de $[|1, n|]$ involutives (i.e $fof = id$). Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n!} x^n$? (X - ESPCI)

d) Soit N un entier non carré parfait dont la racine carrée est notée a.

i) Etablir qu'il existe une suite d'entiers (p_n) telle que $na - p_n \in [-1/2, 1/2]$, ce pour tout n.

ii) Vérifier qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|\sin(na\pi)| > \dfrac{c}{n}$.

iii) En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{\sin(n\pi\sqrt{2})}$.

Solution : a) Si nous pouvions appliquer la règle de d'Alembert à notre série et en notant R le rayon de convergence à préciser, nous aurions $R = 4$ puisque $\dfrac{a_{n+3}}{a_n} = \dfrac{a_{n+3}}{a_{n+2}} \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ et, par passage à la limite $\dfrac{1}{64} = \dfrac{1}{R^3}$.

Prenons x non nul et $|x| < 4$ et appliquons la règle de d'Alembert pour les STP aux séries $\sum_{n\geq 0} |a_{3n+k} x^{3n+k}|$ $(k = 0, 1, 2)$, il vient $\dfrac{|a_{3n+3+k} x^{3n+3+k}|}{|a_{3n+k} x^{3n+k}|} = |\dfrac{a_{3n+3+k}}{a_{3n+k}}| x^3| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \dfrac{|x^3|}{64} < 1$.

Donc les séries $\sum_{n\geq 0} |a_{3n+k} x^{3n+k}|$ convergent et il en va de même pour la STP $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$. Ceci montre que $R \geq 4$ (car $R \geq |x|$ et on fait tendre x vers 4^-).

La même démarche,appliquée à la seule série correspondant à $k = 0$, conduit pour $|x| > 4$ à une limite > 1 et montre que la suite$(a_{3n} x^{3n})$ ne tend pas vers 0 donc que $R \leq 4$(même type d'explications) donc $\boxed{\text{R} = 4}$■

b) On note R et R' les rayons à comparer. Pour tout entier naturel n : $|\dfrac{A_n}{n!}| \leq \dfrac{\sum_{k=0}^{n} |a_k|}{n!}$ puis de$\dbinom{n}{k} \geq 1$

pour tout entier $k, 0 \leq k \leq n$ on tire (dans le même contexte) que $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{k!(n-k)!}$ donc que $|\dfrac{A_n}{n!}| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{k!} \frac{1}{(n-k)!}$; on reconnaît alors en le majorant le coefficient d'ordre n du produit de Cauchy de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{|a_n|}{n!} x^n$ et de la série exponentielle ainsi $R' \geq min(R, +\infty) = R$.

Inversement $\forall n \geq 1, \dfrac{a_n}{n!} = \dfrac{A_n}{n!} - \dfrac{A_{n-1}}{n!}$ et les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{A_n}{n!} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{-1} \frac{A_{n-1}}{(n-1)!} x^n$ ont même rayon de convergence R' donc on a bien aussi $R \geq R'$ soit enfin $\boxed{\text{R = R'}}$■

d)i) Prendre l'entier le plus proche de na.

ii) Pour tout $n \geq 1$, $|(na - p_n)\pi| \in [0, \pi/2]$, ainsi $|\sin((na - p_n)\pi)| = \sin(|(na - p_n)\pi|) \geq \dfrac{2}{\pi} |(na - p_n)\pi|$, ce par inégalité de convexité classique.

D'où $|\sin(na\pi)| \geq 2 |na - p_n|$; de plus $|na - p_n| |na + p_n| = \left|Nn^2 - (p_n)^2\right| \geq 1$, ce puisque N n'est pas un carré parfait et qu'ainsi $\left|Nn^2 - (p_n)^2\right| \in \mathbb{N}^*$.

Enfin on note avec i) que l'on dispose de l'encadrement (valable pour tout $n \geq 1$) $na - 1/2 \leq p_n \leq na + 1/2$, en particulier les $p_n \geq 0$ et l'inégalité précédente donne $|na - p_n| \geq \dfrac{1}{na + p_n}$ soit aussi (avec l'encadrement) $|na - p_n| \geq \dfrac{1}{2na + 1/2}$. Par simple compilation, il vient ,$\forall n \geq 1$:

$|\sin(na\pi)| \geq \dfrac{2}{2na + 1/2} \geq \dfrac{2}{2na + 1/2} \geq \dfrac{1}{2na}$.

iii) Comme pour $n \geq 1$: $1 \leq \left|\dfrac{1}{\sin(n\pi\sqrt{2})}\right| \leq 2\sqrt{2}n$, le rayon de convergence vaut 1 par encadrement■