Corrigé partiel du TD 20 (Séries entières. DSE)

Exercice 1 : (CCP PC 2019 écrit)
Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \qquad (E)$$

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \qquad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q1 Justifier que la fonction f est de classe C^2 et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

Q2 Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

Q3 Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q4 En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

Q5 Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}$$

est une solution de (H) sur $]-1, 1[$ développable en série entière.

Partie II - Solution de (E) sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

On désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x).$$

Q6 Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I, puis exprimer z' et z'' avec y, y' et y''.

Q7 Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle:

$$xz'' + z' = 2x. \qquad (E_1)$$

Q8 Montrer que si z est solution de (E_1) sur I, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

Q9 En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I.

Solution :

Q1. f est la somme d'une série entière de rayon $r > 0$ donc f est C^∞ sur $]-r;r[$ et on peut dériver terme à terme à tout ordre; en particulier, elle est de classe C^2 sur $]-r;r[$ et, pour $x \in]-r;r[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Par propriété des séries entières, ces deux séries sont aussi de rayon r.

Q2. On a donc, pour $x \in]-r;r[$, $x^2 f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$

$x^3 f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n$

$x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$

$x^2 f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} - n a_n \\
&\qquad - (n-1)a_{n-1} + a_n \Big) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((n^2 - 2n + 1) a_n - (n^2 - 3n + 2 + n - 1) a_{n-1} \Big) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) x^n
\end{aligned}$$

Pour $n = 1$, $(n-1)^2 = 0$ donc, si on pose, pour $n \geq 2$, $b_n = (n-1)^2$, on a

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n (a_n - a_{n-1}) x^n$$

Q3. La somme d'une série entière est nulle sur $]-r;r[$ $(r > 0)$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls (unicité d'un développement en série entière) donc, d'après la question précédente, f est solution de (H) si et seulement si $a_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 2$, $b_n(a_n - a_{n-1}) = 0$. Mais, pour

$n \geq 2$, $b_n \neq 0$ donc $a_n - a_{n-1} = 0$.
En passant de n à $n+1$ on a finalement : f est solution de (H) sur $]-r;r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n$.

Q4. On suppose que f est solution de (H) sur $]-r;r[$. Alors, $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $a_n = a_1$. La série géométrique $\sum x^n$ est de rayon 1 donc $r \geq 1$ ($r = +\infty$ si $a_1 = 0$) et, en posant $\lambda = a_1$, pour $x \in]-1;1[$, $f(x) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$.
Il s'agit de la somme d'une série géométrique de raison $x \in]-1;1[$ et de premier terme x donc, pour $x \in]-1;1[$,

$$f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}$$

Q5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et g la fonction $x \mapsto \dfrac{\lambda x}{1-x}$.
Alors, d'après le calcul précédent, pour $x \in]-1;1[$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} łx^n$: g est la somme d'une série entière de rayon $1 > 0$. De plus, pour $x \in]-1;1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $a_n = \lambda$; par conséquent, pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n$.
On peut donc utiliser une question précédente (qui est une équivalence) pour conclure que g est une solution de (H) sur $]-1;1[$, développable en série entière.

Partie II - Solutions de (E) sur $]0;1[$ ou $]1;+\infty[$

Q6. Par produit de fonctions de classe C^2 sur I, z est de classe C^2 sur I et, pour $x \in I$, $z'(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) y'(x) - \dfrac{1}{x^2} y(x)$ et $z''(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) y''(x) - \dfrac{2}{x^2} y'(x) + \dfrac{2}{x^3} y(x)$.

Q7. Pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} xz''(x) + z'(x) &= (1-x)y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) + \frac{2}{x^2}y(x) + (1/x - 1)y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)\right) \end{aligned}$$

donc y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation

$$xz'' + z' = 2x$$

Q8. z est solution de (E_1) sur I si et seulement si z' est solution sur (I) de l'équation (E_2) : $xZ' + Z = 2x$.
L'équation homogène associée à (E_2) est (H_2) : $xZ' + Z = 0$, équivalente à $Z' + \dfrac{1}{x} Z = 0$ (x ne s'annule pas sur I). $a : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur I; une primitive de a est $x \mapsto \ln(x)$ donc les solutions de (H_2) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$.
$x \mapsto x$ est solution particulière de (E_2) donc les solutions de (E_2) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x} + x$.
Finalement, z est solution de (E_1) sur I si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $z'(x) = \dfrac{\lambda}{x} + x$.

Q9. Ceci équivaut à l'existence de $\mu \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $z(x) = \lambda \ln(x) + \dfrac{x^2}{2} + \mu$.
De plus, pour $x \in I$, $\dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x} \neq 0$ donc y est solution de (E) sur I si et seulement si il

existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x\in I$, $y(x)=\dfrac{x}{1-x}\left(\lambda\ln(x)+\dfrac{x^2}{2}+\mu\right)$.
Les solutions de (E) sur I sont donc les fonctions de la forme

$$x\mapsto \frac{\lambda x}{1-x}\ln(x)+\frac{\mu x}{1-x}+\frac{x^3}{2(1-x)}$$

lorsque $(ł,\mu)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

....

....

Exercice 2 : (Fonction C^∞ non DSE)
On doit à Cauchy (1823) le premier exemple de fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ n'étant pas DSE.
On pose $f: x\to\begin{cases} e^{-1/x^2} \text{ si } x\neq 0\\ \quad 0 \text{ sinon}\end{cases}$.
a) Vérifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$.
b) Etablir par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, il existe $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x\neq 0, f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}f(x)$.
c) En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que toutes les dérivées successives de f en 0 sont nulles.
d) Etablir que la série de Taylor de f converge sur $\mathbb{R}$ mais que f n'est pas DSE (procéder par l'absurde).
Exercice 3 : (DSE = technique)
i) Donner le DSE de $x\to\ln(x^2+x+1)$.
ii) Donner le DSE de $x\to\arctan(1-x)$
Solution :
On note f les fonctions dont on cherche à montrer qu'elles sont DSE en constatant qu'elles sont C^∞ sur leur domaine de définition
i) On peut observer que $\dfrac{1-x^3}{1-x}=x^2+x+1$ pour $x\in I=]-1,1[$ donc $f(x)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)$ dans le même contexte. Ainsi avec les DSE usuels :
$\forall x\in I,\ f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$, où $b_n=\dfrac{1}{n}$ si n n'est pas un multiple de 3 et $b_{3p}=\dfrac{-2}{3p}$ si $p\in\mathbb{N}^*$.
Ceci montre que f est bien DSE sur I, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}b_n$ divergeant on ne peut espérer mieux.$\square$
ii) On dérive f et on récupère $f'(x)=\dfrac{-1}{1+(1-x)^2}$ pour tout réel x. On va décomposer en éléments simples cette fraction rationnelle.
Soit $x\in\mathbb{R}$.
En posant $\alpha=-1+i$, on trouve $f'(x)=\dfrac{1}{2i}(\dfrac{1}{x-\alpha}-\dfrac{1}{x-\overline{\alpha}})$ ou encore (en posant $\beta=\dfrac{1}{\alpha}$) :
$f'(x)=\dfrac{1}{2i}(-\dfrac{\beta}{1-\beta x}+\dfrac{\overline{\beta}}{1-\overline{\beta}x})$.
Dès lors pour $|x|<|\alpha|=\sqrt{2}=R$, $f'(x)=\dfrac{1}{2i}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\overline{\beta}^{n+1}-\beta^{n+1})x^n$.
Ceci montre que f' est DSE sur l'intervalle $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[=I$ et donc qu'il en va de même pour f et par primitivation terme à terme (sur le segment $[0,x], x\in I$), il vient :
$\forall x\in I, f(x)-f(0)=\dfrac{1}{2i}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\overline{\beta}^{n+1}-\beta^{n+1})x^{n+1}}{n+1}$.
En observant que $\alpha=\sqrt{2}\exp(3i\pi/4)$ donc que $\beta=\dfrac{e^{\frac{-3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$, nous avons $\dfrac{(\overline{\beta}^{n+1}-\beta^{n+1})}{2i}=$
$-\Im(\beta^{n+1})=\dfrac{\sin(\frac{3(n+1)\pi}{4})}{(\sqrt{2})^{n+1}}$ et (puisque $f(0)=\arctan(1)=\dfrac{\pi}{4}$) :

$$\boxed{\forall x\in I, f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\frac{3(n+1)\pi}{4})}{(\sqrt{2})^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}}\ \blacksquare$$

Exercice 4 : (EDL)

Solutions DSE de $x^2y'' + xy' + (4x^4 - 1)y = 0$?

Exercice 5 : (CCINP ♡)

$I =]-1, 1[$.

On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln(n)x^n$ et $g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 - \frac{1}{n})x^n$.

1) Déterminer les rayons de convergence des séries entières dont les sommes sont f et g.
2) Montrer que g est continue sur $[-1, 1[$.
3) Trouver une relation entre $(1 - x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in I$.
4) Vérifier que f est continue sur I et prolongeable par continuité en -1.
5) Eéquivalents de $g(x)$ et de $f(x)$ si $x \to 1^-$.

Exercice 6 : (Fonction C^∞ non DSE)

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cos(n^2x)$.

Vérifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais que sa série de taylor ne converge qu'en 0.

Exercice 7 : (Ovni X)

La fonction $f : x \to \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n!}$ admet-elle une limite si x tend vers 1^-?

Exercice 8 : (IMT)♡)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(ch(t))^n}$.

1) Etablir le bien-fondé de cette définition.
2) Déterminer la limite de la suite (a_n) (CVD !).
3) Convergence de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$?
4) Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$?