Corrigé du Test : Séries entières et équations différentielles (1h)

Ce problème est une adaptation d'une partie d'un ancien sujet d'écrit des Mines.
Les fonctions considérées dans ce qui suit sont à valeurs réelles.
Soient un réel α et l'équation différentielle (E) :

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0, \text{ où } x \in I =]-1,1[.$$

Question 1 *(Présentation d'une solution de (E))*
On pose, pour $x \in I$, $f(x) = \cos(\alpha \arcsin(x))$.
a) f peut-elle être développable en série entière sur I ?
b) En calculant les dérivées première et seconde de f, vérifier que f est solution de (E).

On se propose de chercher les solutions de (E) qui sont paires et DSE au moins sur l'intervalle I.
Leur ensemble est noté $\mathcal{P}$.

Question 2 *(Détermination de $\mathcal{P}$)*
a) $\mathcal{P}$, muni des opérations usuelles sur les fonctions, est-il un $\mathbb{R}$ espace vectoriel?
On se donne une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$ de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que sa somme, notée g, soit solution de (E).
b) Exprimer, en le justifiant, les dérivées première et seconde sur I de g.
c) En détaillant soigneusement les étapes du raisonnement établir que g est solution de E si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{4n^2 - \alpha^2}{(2n+2)(2n+1)} a_n.$$

d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(4k^2 - \alpha^2)}{(2n)!} a_0$.
e) En déduire $\mathcal{P}$ et donner sa dimension.

On posera (pour x à préciser) $\boxed{h(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(4k^2 - \alpha^2)}{(2n)!} x^{2n}}$.

Solution :
e) L'ensemble des questions b),c) et d) montre que $\mathcal{P} \subset Vect(h)$.
Nous allons établir l'inclusion inverse en montrant (puisque $\mathcal{P}$ est un ev) que $h \in \mathcal{P}$.
La fonction h est à l'évidence paire, et en posant $b_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(4k^2 - \alpha^2)}{(2n)!}$, ce pour tout n, nous avons d) et c) obligent h solution de (E).
Reste à montrer que le rayon de convergence de la série est au moins égal à 1.
Ce sera le cas si α est un entier relatif pair puisqu'alors b_n est nulle APCR.
Fixons $x \in I$ et $x \neq 0$ et posons $u_n = |b_n| x^{2n}$, pour tout n; on remarque que (on a tout fait pour) que $u_n > 0$, comme par ailleurs $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4n^2 - \alpha^2}{(2n+2)(2n+1)} x^2$ (le critère de d'Alembert pour les STP peut s'employer) et donne, en passant à la limite : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to x^2 < 1$.
Autrement dit la série entière dont h est la somme converge pour tout $x \in I$ donc h est au moins DSE sur I et aisni $h \in \mathcal{P}$. Soit $\mathcal{P} = Vect(h)$ et $\dim(\mathcal{P}) = 1$ puisque $h \neq 0$■

Soit S le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des solutions de E,**on admet le principe de Cauchy suivant** :
$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \exists! \phi \in S \text{ tel que } \phi(0) = a \text{ et } \phi'(0) = b}$

Question 3 *(Où on montre que f est DSE sur I)*
Prouver que $f = h$. Conclure en donnant le DSE de f.

Solution :
$f = h$ puisque f et h satisfont le problème de Cauchy (E) avec $y(0) = 1$ et $y'(O) = 0$■

Question 4 *(Compléments sur S).*
a) Caractériser les valeurs de α pour lesquelles S admet une solution polynomiale paire non nulle.
b) Prouver que S est de dimension 2. (Utiliser le principe de Cauchy)
c) Déterminer S.

Solution :
a) Avec les notations adoptées en réponse à Q2e), ce sont les $\alpha \in 2\mathbb{Z}$.
b) L'application linéaire $\phi \in S \to (\phi(0), \phi'(0))$ est (par le principe de Cauchy admis) un isomorphisme d'espaces vectoriels entre S et $\mathbb{R}^2$ donc $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
c) On conjecture et vérifie par un calcul simple que $m : x \in I \to \sin(\alpha \arcsin(x))$ est solution de (E) et on montre facilement que la famille (f, m) est libre donc $S = Vect(f, m)$■

FIN