DL2 Corrigé

Les trois premières questions sont rédigées dans le corrigé du DS3.

1 Une classe d'opérateurs sur $C_0(\mathbb{R})$.

Q.4. Soit $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$;

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |T_f(u)(x)| = |f * u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|u\|_\infty f(t)\, dt = \|u\|_\infty$$

Le majorant est indépendant de x et un passage à la borne supérieure donne

$$\|T_f(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

Q.5. Soient $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$; avec la commutativité et l'associativité de $*$, on a

$$T_f T_g(u) = f * T_g(u) = f * (g * u) = (g * u) * f = g * (u * f) = g * (f * u) = T_g T_f(u)$$

Q.6. Soit $f1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$; on a (avec la question précédente pour la seconde relation)

$$T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{f_1}T_{g_2}(u) = T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u))$$

$$T_{f_1}T_{g_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u) = T_{g_2}T_{f_1}(u) - T_{g_2}T_{g_1}(u) = T_{g_2}(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u))$$

On passe à la norme infinie, on utilise la question 4, puis on somme et on utilise l'inégalité triangulaire pour obtenir

$$\begin{aligned}\|T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u)\|_\infty &\leq \|T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{f_1}T_{g_2}(u)\|_\infty + \|T_{f_1}T_{g_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u)\|_\infty \\ &\leq \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty + \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_\infty\end{aligned}$$

Q.7. On remarque tout d'abord que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (T_f)^n(u) = f * f * \cdots * f * u = f^{*n} * u = T_{f^{*n}}(u)$$

On prouve alors le résultat annoncé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : le résultat est immédiat pour $n = 1$ (on a même une égalité).
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat est vrai au rang n. La question précédente donne (avec $f_1 = f$, $f_2 = f^{*n}$, $g_1 = g$ et $g_2 = g^{*n}$)

  $$\|(T_f)^{n+1}(u) - (T_g)^{n+1}\|_\infty \leq \|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty + \|(T_f)^n(u) - (T_g)^n\|_\infty \leq (n+1)\|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty$$

  On conclut que le résultat est vrai au rang $n + 1$.

2 Lois normales.

Q.8. g_h est continue positive et bornée (majorée par $\dfrac{1}{h\sqrt{2\pi}}$). C'est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (seuls problèmes aux voisinages des infinis où g_h est négligeable devant $1/x^2$ par croissances comparées). De plus, le changement de variable $u = \dfrac{x}{h}$ donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)\, du = 1$$

On en déduit que

$$\forall h>0,\ g_h\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$$

$x\mapsto xg_h(x)$ et $x\mapsto x^2g_h(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (seuls problèmes aux voisinages des infinis où les fonctions sont négligeables devant $1/x^2$ par croissances comparées). Les intégrales proposées existent donc. On a directement, par imparité de la fonction (et sachant que l'intégrale existe)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xg_h(x)\ dx = 0$$

Par ailleurs, une intégration par parties donne

$$\int_a^b x^2g_h(x)\ dx = \left[-\frac{hx}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2h^2}}\right]_a^b+\frac{h}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2h^2}}\ dx = \left[-\frac{hx}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2h^2}}\right]_a^b+h^2\int_a^b g_h(x)\ dx$$

En faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$ (les intégrales existent) on a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2g_h(x)\ dx = h^2$$

Q.9. Comme on l'a remarqué en question 7,

$$\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n = T_{(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n}}$$

Par ailleurs, on a (récurrence quasi immédiate avec le résultat admis par l'énoncé)

$$g_{h_1}*g_{h_2}*\cdots*g_{h_n}=g_h\ \text{ avec }\ h=\sqrt{h_1^2+h_2^2+\cdots+h_n^2}$$

et en particulier $(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n}=g_h$ ce qui donne

$$\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n = T_{(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n}} = T_{g_h}$$

3 Convergence faible sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q.10. Montrons par récurrence sur k que la propriété

$$\exists\, P_{k,h},\ \text{ polynôme de degré } k,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \frac{d^k}{dx^k}g_h(x)=P_{k,h}(x)e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

est vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$.

- <u>Initialisation</u> : le résultat est vrai au rang 0 avec $P_{0,h}=\dfrac{1}{h\sqrt{2\pi}}$ qui est un polynôme constant non nul et donc de degré 0.
- <u>Hérédité</u> : supposons le résultat acquis à un rang $k-1\geq 0$. On a alors

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{d^k}{dx^k}g_h(x)=(P'_{k-1,h}(x)-\frac{x}{h^2}P_{k-1,h}(x))e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

  Posons $P_{k,h}(x)=P'_{k-1,h}(x)-\dfrac{x}{h^2}P_{k-1,h}(x)$. C'est un polynôme de degré k (somme d'un polynôme de degré k et d'un de degré $\leq k-1$) qui vérifie la propriété voulue.

Q.11. La fonction $s_{k,h}\ :\ u\mapsto P_{k,h}(u)e^{-\frac{u^2}{4h^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle aux infinis (croissances comparées). C'est donc une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. On a alors,

$$\forall x,t\in\mathbb{R},\ \left|P_{k,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}\right|\leq \|s_{k,h}\|_\infty e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}$$

On suppose désormais que $|x|\leq a$. Par seconde forme de l'inégalité triangulaire indique que $|x-t|\geq |t|-|x|\geq |t|-a$. Si $|t|\geq a$, ces termes sont positifs et par croissance de $u\mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}^+$ on a donc

$(x-t)^2 \geq (|t|-a)^2$. On en déduit que pour $|t| \geq a$, $e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \leq e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4h^2}}$. Par ailleurs, pour $|t| < a$, on a $e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \leq 1$. Posons donc

$$\phi_k(t) = ll\|s_{k,h}\|_\infty \text{si} \quad |t| < a\|s_{k,h}\|_\infty e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4h^2}} \text{sinon}$$

On obtient une fonction continue par morceaux, négligeable devant $1/t^2$ aux voisinages des infinis et donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\forall x \in [-a, a], \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \left| P_{k,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} \right| \leq \phi_k(t)$$

ϕ_k ne dépend effectivement que de h, k et a.

Q.12. Soit $h > 0$ et soit $u \in C_0(\mathbb{R})$. On veut appliquer le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- Pour tout réel x, $t \mapsto g_h(x-t)u(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (cela a été prouvé en question 1).
- Pour tout réel t, $x \mapsto g_h(x-t)u(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée k-ième est la fonction $x \mapsto P_{k,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}u(t)$.
- Pour tout segment $[-a, a]$, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la question 11 donne une domination de la dérivée k-ième précédente par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et cette domination est uniforme vis à vis de $x \in [-a, a]$.

$T_{g_h}(u)$ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-a, a]$ pour tout a et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \frac{d^k}{dx^k} T_{g_h}(u) \ : \ x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P_{k,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} u(t) \, dt$$

Q.13. Soit $f_{k,h} \ : \ u \mapsto P_{k,h}(u)e^{-\frac{u^2}{2h^2}}$. Les fonctions $f_{k,h}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (continues et dominées par $1/u^2$ au voisinage des infinis). Comme en questions 1 et 2, on peut écrire (l'hypothèse $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ peut être remplacée par l'intégrabilité de f et les quantités écrites continuent à exister et à vérifier les propriétés des questions 1 et 2).

$$\frac{d^k}{dx^k} T_{g_h}(u)(x) = f_{k,h} * u(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

On a donc montré que

$$T_{g_h}(u) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

Q.14. Soit $\alpha > 0$. Si $t \geq \alpha$ alors $t^2 \geq t\alpha$ et donc

$$\forall x \geq \alpha, \ 0 \leq g_h(t) \leq \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha t}{2h^2}}$$

Les fonctions considérées étant intégrables au voisinage de $+\infty$, on peut intégrer les inégalités précédentes et on obtient

$$0 \leq \int_\alpha^{+\infty} g_h(t) \, dt \leq \left[-\frac{2h^2}{\alpha h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha t}{2h^2}} \right]_\alpha^{+\infty} = \frac{2h}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2h^2}} \leq \frac{2h}{\alpha\sqrt{2\pi}}$$

Par théorème d'encadrement, on a donc

$$\lim_{h \to 0^+} \int_\alpha^{+\infty} g_h(t) \, dt = 0$$

La fonction g_h étant paire, on en déduit aussi que

$$\lim_{h \to 0^+} \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) \, dt = 0$$

Q.15. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$. On va prouver le résultat demandé en revenant à la définition des limites. On se donne donc $\varepsilon > 0$. La propriété admise nous donne $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \le \alpha \ \Rightarrow\ |u(x)-u(y)| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

La question précédente (α est maintenant connu et fixé) donne $r > 0$ tel que

$$\forall h \in]0,r],\ 0 \le \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\,dt \le \frac{\varepsilon}{8\|u\|_\infty} \quad \text{et} \quad 0 \le \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\,dt \le \frac{\varepsilon}{8\|u\|_\infty}$$

Soit $h \in]0,r]$ et $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On a (g_h étant d'intégrale égale à 1)

$$T_{g_h}(u)(x) - u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)(u(x-t)-u(x))\,dt$$

On passe au module, on majore par positivité de l'intégrale et on utilise la relation de Chasles pour obtenir (en majorant grossièrement $|u(x-t)-u(x)|$ par $2\|u\|_\infty$)

$$|T_{g_h}(u)(x) - u(x)| \le \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t)|u(x-t)-u(x)|\,dt + 2\|u\|_\infty \left(\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\,dt + \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\,dt\right)$$

On en déduit alors que

$$|T_{g_h}(u)(x) - u(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$$

Le majorant étant indépendant de x, on a $\|T_{g_h}(u) - u\|_\infty \le \varepsilon$. On a prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0/\ \forall h \in]0,r],\ \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty \le \varepsilon$$

c'est à dire que

$$\lim_{h\to 0^+} \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty = 0$$

Q.16. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$. Ecrivons que, pour tout $h > 0$.

$$T_{f_n}(u) - T_f(u) = (T_{f_n}(u) - T_{f_n}T_{g_h}(u)) + (T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_f T_{g_h}(u)) + (T_f T_{g_h}(u) - T_f(u))$$

On passe à la norme infinie et on utilise l'inégalité triangulaire et la question 4 pour obtenir

$$\|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty \le \|u - T_{g_h}(u)\|_\infty + \|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_f T_{g_h}(u)\|_\infty + \|u - T_{g_h}(u)\|_\infty$$

On revient à la définition des limites pour répondre à la question posée. Soit $\varepsilon > 0$; la question précédente nous permet de trouver un $h > 0$ tel que $\|u - T_{g_h}(u)\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{3}$. h étant fixé, $T_{g_h}(u) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et l'hypothèse faite donne un n_0 tel que si $n \ge n_0$ on a $\|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_f T_{g_h}(u)\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{3}$. On a ainsi

$$\forall n \ge n_0,\ \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty \le \varepsilon$$

et on a prouvé que

$$\lim_{n\to+\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty = 0$$

Ceci étant vrai pour tout $u \in C_0(\mathbb{R})$,

$$(f_n) \text{ converge faiblement vers } f$$

Q.17. $x \in \mathbb{R}$ est ici fixé. D'après la formule de Taylor-Young, on a

$$u(x-t) = u(x) - tu'(x) + \frac{t^2}{2}u''(x) + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

et ainsi

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} = \frac{u''(x)}{2}$$

Comme f_n est d'intégrale égale à 1, on a

$$n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) = n\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)(u(x-t)-u(x))\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-t)-u(x)}{t^2}\,dt \qquad (1)$$

Comme $f_n^{\#}$ est d'intégrale égale à 1 on a aussi

$$-\frac{1}{2}u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u''(x)}{2} f_n^{\#}(t)\ dt \tag{2}$$

Enfin, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) = 0$, on a aussi (poser $v = \frac{t}{\sqrt{n}}$) $\int_{-\infty}^{+\infty} vf_n(v)\ dv = 0$ et donc

$$0 = n\sqrt{n}u'(x) \int_{-\infty}^{+\infty} tf_n(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'(x)}{t} f_n^{\#}(t)\ dt \tag{3}$$

En sommant les relations (1), (2) et (3), on obtient

$$n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) - \frac{1}{2}u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x)\right) f_n^{\#}(t)\ dt$$

Q.18. Soit $\alpha > 0$ quelconque. On a (en posant $v = \sqrt{n}t$)

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f_n^{\#}(t)\ dt = \int_{\alpha}^{+\infty} nt^2\sqrt{n}f(\sqrt{n}t)\ dt = \int_{\sqrt{n}\alpha}^{+\infty} v^2 f(v)\ dv$$

Comme l'intégrale de $v \mapsto v^2 f(v)$ existe sur $\mathbb{R}$, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{+\infty} f_n^{\#}(t)\ dt = 0 \tag{4}$$

et de façon similaire,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^{\#}(t)\ dt = 0 \tag{5}$$

Posons maintenant $g(x,t) = \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x)$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne (u^3 est bornée puisque continue et de limite nulle aux infinis)

$$|u(x-t) - u(x) - tu'(x) - \frac{t^2}{2}u''(x)| \leq \frac{|t|^3}{6}\|u^{(3)}\|_\infty$$

et on a donc

$$|g(x,t)| \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6}|t|$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a alors, avec la relation précédente (et puisque $f_n^{\#}$ est positive et d'intégrale égale à 1)

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(x,t)f_n^{\#}(t)\ dt\right| \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |t|f_n^{\#}(t)\ dt \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6}\varepsilon$$

Les relations (4) et (5) avec $\alpha = \varepsilon$ donnent un rang n_0 à partir duquel les intégrales sont inférieures ou égales à ε^3. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall |t| \geq \varepsilon,\ |g(x,t)| \leq \frac{1}{2}\|u''\|_\infty + \frac{2\|u\|_\infty}{\varepsilon^2} + \frac{\|u'\|_\infty}{\varepsilon}$$

et on a donc, pour $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x,t)f_n^{\#}(t)\ dt\right| &\leq \left(\frac{1}{2}\|u''\|_\infty + \frac{2\|u\|_\infty}{\varepsilon^2} + \frac{\|u'\|_\infty}{\varepsilon}\right)\int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n^{\#}(t)\ dt \\ &\leq \frac{\varepsilon^3}{2}\|u''\|_\infty + 2\|u\|_\infty\varepsilon + \|u'\|_\infty\varepsilon^2\end{aligned}$$

On procède de même avec l'intégrale entre $-\infty$ et $-\alpha$. On a alors

$$\forall n \geq n_0,\ \left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t)f_n^{\#}(t)\ dt\right| \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6}\varepsilon + \varepsilon^3\|u''\|_\infty + 4\|u\|_\infty\varepsilon + 2\|u'\|_\infty\varepsilon^2$$

Le majorant est indépedant de x et on peut passer à la borne supérieure. Compte-tenu de la question précédente, on a

$$\forall n \geq n_0,\ \left\|n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u''\right\|_\infty \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6}\varepsilon + \varepsilon^3\|u''\|_\infty + 4\|u\|_\infty\varepsilon + 2\|u'\|_\infty\varepsilon^2$$

le majorant est de limite nulle quand ε tend vers 0 et on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u''\right\|_\infty = 0$$

Q.19. Avec les questions 9 puis 7, on a

$$\|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_{1/\sqrt{n}}}^n(u)\|_\infty \leq n\|T_{f_n}(u) - T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u)\|_\infty$$

On ecrit alors que $n(T_{f_n}(u) - T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u)) = A_n - B_n$ avec

$$A_n = n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \text{ et } B_n = n(T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u) - u) - \frac{1}{2}u''$$

La question précédente donne $\|A_n\|_\infty \to 0$ mais aussi $\|B_n\|_\infty \to 0$ car c'est un cas particulier en choisissant $f = g_1$ (qui vérifie les bonnes hypothèses). On en déduit que $\|A_n - B_n\|_\infty \to 0$, ce qu'il fallait prouver :

$$\lim_{n\to+\infty} \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = 0$$

Comme $T_{f_n}^n(u) = T_{f_n^{*n}}$, on se retrouve exactement dans le cadre de la question 16 pour conclure que (f_n^{*n}) converge faiblement vers g_1.