Corrigé du DS4 (4h) : Option CCINP +

• La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés.
• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert et bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Exercice 1 (Analyse)
I : Polylogarithme

Dans toute cette partie α est un réel quelconque.
1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^\alpha}$.
On note L_α la somme de cette série entière.
2) Justifier que L_α est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
3) Montrer que : $\forall x\in\,]-1,1[\,,\ L_\alpha(x)+L_\alpha(-x)=2^{1-\alpha}\ L_\alpha(x^2)$.
4) a) Pour tout $x\in\,]-1,1[$, établir une relation entre $L'_{\alpha+1}(x)$ et $L_\alpha(x)$.
b) Pour ces mêmes x, donner les expressions de $L_\alpha(x)$ si $\alpha=0$, $\alpha=1$ puis $\alpha=-1$.
5) Dans cette question on suppose $\alpha\leq 1$.
Montrer, en utilisant 4)b) et en minorant $L_\alpha(x)$ pour $x\in[0,1[$, que : $L_\alpha(x)\underset{x\to 1^-}{\to}+\infty$.

II : Prolongement pour $\alpha>1$

Dans cette partie α est un réel strictement supérieur à 1.
6) Pour $n\geq 1$ et $x\in[-1,1]$, on pose $u_n(x)=\dfrac{x^n}{n^\alpha}$.
a) Etablir la convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n$ sur $[-1,1]$.
b) Prouver que L_α est continue sur $[-1,1]$.
7) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}L'_2(x)$ et préciser si L_2 est dérivable en 1.
8) Montrer que $\phi:u\to\dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
9) Soit $K_\alpha(x)\overset{def}{=}\displaystyle\int_0^\infty\frac{u^{\alpha-1}}{e^u-x}du$, ce pour $x\leq 1$.
Vérifier que l'application K_α ainsi définie est continue sur $]-\infty,1]$.
10) Prouver l'existence de $G_\alpha\overset{def}{=}\displaystyle\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ et justifier que $G_\alpha>0$.
11) Montrer que pour tout x de $[-1,1]$ et tout $u>0$, on a : $\dfrac{1}{e^u-x}=\displaystyle\sum_{k=0}^\infty x^ke^{-(k+1)u}$.
12) A l'aide d'un changement de variable, établir que : $\forall k\geq 0$, $\displaystyle\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-(k+1)u}du=\frac{G_\alpha}{(k+1)^\alpha}$.
13) En déduire, que pour tout $x\in[-1,1]$, on a : $x\ K_\alpha(x)=G_\alpha L_\alpha(x)$.
On précisera avec soin le théorème d'intégration terme à terme utilisé.
14) Déterminer alors un prolongement par continuité à $]-\infty,1]$ de la fonction L_α.
Solution :
1) Par propriété des rayons de convergence, le rayon de convergence de cette série entière est celui de $\displaystyle\sum_{n\geq 0}x^n$ dont la valeur notoire est $\boxed{1}$ □
2) Nous sommes par 1) $\boxed{\text{dans l'intervalle ouvert de convergence de notre série entière}}$, domaine dans lequel

on sait qu'elle y est de classe C^∞□

3) Pour $x \in]-1,1[, L_\alpha(x)+L_\alpha(-x) = \sum_{p=1}^{\infty} 2\frac{x^{2p}}{(2p)^\alpha} = \boxed{2^{1-\alpha}L_\alpha(x^2)}$, ce par neutralisation des termes d'exposant impairs□

4)a) Par $\boxed{\text{dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence}}$, il vient, pour $x \in]-1,1[, L'_{\alpha+1}(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{p^\alpha}$ donc $\boxed{xL'_{\alpha+1}(x) = L_\alpha(x)}$□

b) b) En utilisant les DSE usuels, il vient, pour $x \in]-1,1[$:

$\boxed{L_0(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}, L_1(x) = -\ln(1-x)}$ et, avec 4)a), $\boxed{L_{-1}(x) = \frac{x}{(1-x)^2}}$□

5) Pour $0 \leq x < 1, L_\alpha(x) \geq L_1(x)$, ce puisque $\frac{x^n}{n^\alpha} \geq \frac{x^n}{n}$ pour tout $n \geq 1$ car $\alpha \leq 1$. Ainsi, $L_\alpha(x) \geq -\ln(1-x)$ et comme $-\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty$, il vient, par minoration (ou gendarmes) le résultat voulu□

6)a) Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [-1,1]$, nous avons $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^\alpha}$; la convergence ($\alpha > 1$) de la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ assure alors la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ sur $[-1,1]$□

b) La CVN sur $[-1,1]$ établie en a) et la continuité sur ce même segment de chaque u_n permettent d'employer $\boxed{\text{le théorème } C^0 \text{ pour les séries de fonctions}}$ et ainsi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (i.e L_α) est continue (donc définie) sur $[-1,1]$□

7) Avec 4)a) et pour $0 < x < 1, L'_2(x) = \frac{L_1(x)}{x} = -\frac{\ln(1-x)}{x} \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty$. Il en résulte, par théorème de Première année, que $\boxed{L_2 \text{ n'est pas dérivable en } 1}$(tangente verticale au point d'abscisse 1)□

8) ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

En 0, on a $\phi(u) \sim u^{\alpha-2} = \frac{1}{u^{2-\alpha}}$ or $\alpha > 1$ donc $2-\alpha < 1$ ainsi l'intégrabilité sur $]0,1]$ de $u \to \frac{1}{u^{2-\alpha}}$ (Riemann en 0) donne par comparaison celle de ϕ sur le même intervalle.

En $+\infty$, on a $\phi(u) \sim u^{\alpha-1}e^{-u} = o(1/u^2)$ (croissance comparée) donc ϕ est, par comparaison (Riemann en $+\infty$), intégrable sur $[1,+\infty[$.

$\boxed{\text{Bilan : } \phi \in L^1(\mathbb{R}_+^*)}$□

9) On détecte une $\boxed{\text{intégrale à paramètre}}$ pour laquelle nous allons appliquer le théorème de continuité sous le signe intégral.

Nous constatons pour cela :

i)$\forall u > 0, x \leq 1 \to \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est continue car rationnelle à dénominateur jamais nul ($\boxed{\text{continuité suivant le paramètre}}$)

ii) $\forall x \leq 1, u > 0 \to \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est continue (quotient défini de telles fonctions) donc C_M ($\boxed{\text{régularité de l'intégrande}}$)

iii) Pour tout $x \leq 1$ et tout $u > 0, \left|\frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\right| = \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} \leq \phi(u)$, où ϕ est la fonction définie en 8) et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ceci montre $\boxed{\text{la domination de l'intégrande}}$.

Ainsi, nous pouvons appliquer notre théorème et affirmer que $\boxed{K_\alpha \text{ est continue sur }]-\infty,1]}$□

10) On reconnaît la fonction Gamma dont l'existence fait partie des choses vues et revues.

$\boxed{\text{L'intégrande de } G_\alpha \text{ étant continue, positive et non identiquement nulle}}$, on a bien $G_\alpha > 0$□

11) Dans ce contexte, $\frac{1}{e^u - x} = e^{-u} \times \frac{1}{1-q}$, où $q = xe^{-u} \in]-1,1[$.

La somme de la série géométrique (convergente) $\sum_{k\geq 0}$ donne alors $\frac{1}{e^u - x} = e^{-u}\times(\sum_{k=0}^{\infty} x^k e^{-ku}) = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k e^{-(k+1)u}}$□

12) On effectue dans l'intégrale généralisée G_α le $\boxed{\text{changement de variable affine}}$ $t = (k+1)u$ et on a donc $G_{alpha} = (k+1)^{\alpha-1+1} \int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-(k+1)u}du$, ce qui donne exactement la relation souhaitée□

13) On posera, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $u > 0$, $f_k(u) = x^k u^{\alpha-1} e^{-(k+1)u}$; on a alors :

i) Les f_k sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf 12) par exemple).

ii) La série de fonction $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme $S : u > 0 \to \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ y est continue

(donc continue par morceaux) (tout cela avec 11)).
iii) Enfin, pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_0^{\infty}|f_k| = \frac{|x^k|G_\alpha}{(k+1)^\alpha} = O(\frac{1}{k^\alpha})$.
Comme $\alpha > 1$, nous avons établi la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\int_0^{\infty}|f_k|$($\boxed{\text{Condition de Lebesgue}}$).
Nous pouvons donc utiliser le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue qui stipule en particulier que :
$\displaystyle\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} f_k$ soit ici aussi $K_\alpha(x) = G_\alpha(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)^\alpha})$ puis en multipliant par x chaque membre
$\boxed{xK_\alpha(x) = G_\alpha L_\alpha(x)}$□

14) Il est légitime de poser (cf 9) et 10) $L(x) = \dfrac{xK_\alpha(x)}{G_\alpha}$ pour $x \leq 1$.
L et L_α coincident (13)) sur le segment $[-1,1]$ sur lequel ces fonctions sont toutes les deux continues. Comme L est continue sur $]-\infty,-1]$, elle constitue bien un prolongement continu de L_α à cet intervalle■

Exercice 2 (Analyse)
Soit une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) = \int_0^{\pi}\cos\left(x\sin(t)\right)dt.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi}\sin^{2n}(t)dt.$$

Q1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Q2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Q3. Soit une fonction $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad h(x,t) = \cos(t)\sin\left(x\sin(t)\right).$$

Justifier l'existence de $\dfrac{\partial h}{\partial t}$, puis déterminer $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$.

Q4. En déduire que f est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{\textbf{E}}$$

Q5. On suppose qu'il existe une solution de (**E**) développable en série entière notée $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
Montrer que $a_1 = 0$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

Q6. En utilisant un théorème d'interversion série intégrale, montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de f en fonction des termes de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q7. Déduire des questions précédentes que f est l'unique solution développable en série entière de (**E**) vérifiant $f(0) = \pi$.

Q8. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, une expression de W_n en fonction de n.

Solution :

On posera $I = [0, \pi]$ et $g(x,t) = \cos(x\sin(t))$ pour $(x,t) \in L = \mathbb{R} \times I$.

1) Pour tout réel x $t \to g(x,t)$ est continue sur le $\boxed{\text{segment I}}$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}\square$

2) En vue d'employer $\boxed{\text{la règle de Leibniz à l'ordre 2}}$, on observe que :

i) Pour tout réel $t \in I$, $x \in \mathbb{R} \to g(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

ii) Pour tout reél x les applications $t \in I \to \dfrac{\delta^k}{\delta x^k} g(x,t) = (sint)^k \cos(x\sin(t) + k\dfrac{\pi}{2})$, où $k \in [\![0, 2]\!]$ sont continues sur I et $\forall (x,t) \in L$: $|\dfrac{\delta^k}{\delta x^k} g(x,t)| \leq \phi(t) = 1$, ce pour tout $k \in [\![0, 2]\!]$. Comme $\phi \in L^1(I)$, $\boxed{\text{les dominations globales de toutes les dérivées partielles suivant } x}$ sont satisfaites.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégral à l'ordre 2, nous pouvons donc affirmer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $\boxed{f'(x) = -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))dt}$ et $\boxed{f''(x) = -\int_0^\pi (\sin(t))^2 \cos(x\sin(t))dt}\square$

3) h est notoirement dérivable suivant t et $\boxed{\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x(\cos(t))^2\cos(x\sin(t))}$, ce pour $(x,t) \in L\square$

4)Avec 2) et 3) et pour tout réel x, on peut observer que :

$f'(x) = \int_0^\pi (\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t))dt - x\int_0^\pi (1 - (\sin(t))^2)\cos(x\sin(t))dt = [h(x,t)]_{t=0}^{t=\pi} - x(f(x) + f''(x)) = 0 - 0 - x(f(x) + f''(x))$.

Ainsi f est-elle solution sur $\mathbb{R}$ de l'EDLO2 homogène (dite de Bessel[1]) $\boxed{: xy'' + y' + xy = 0}\square$

5) Notons S la somme de cette série entière.

Par dérivation terme à terme de celle-ci sur son intervalle de convergence nous avons :

S solution de (E) sur $]-R, R[$ équivaut à $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$

En posant $n = m - 2$ pour $m \geq 2$ (puis en revenant à l'indice n) dans la somme de droite, il vient :

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1} = 0$ ou enfin

$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 a_n + a_{n-2}) x^{n-1} = 0$ ainsi, par unicité des coefficients d'une série entière :

$\boxed{a_1 = 0}$ et $\boxed{\forall n \geq 2, a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2}}\square$

6) Le développement en série entière de la fonction cosinus permet d'écrire que pour $(x,t) \in L$:

$\cos(x\sin(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}(\sin(t))^{2n}}{(2n)!}$.

Il est alors naturel de fixer le réel x et de poser $u_n(t) = (-1)^n \dfrac{x^{2n}(\sin(t))^{2n}}{(2n)!}$, ce pour tout n et tout t de I.

Ces fonctions sont toutes continues sur le segment I donc intégrables sur ce même segment.

Le DSE permettant de les définir montre que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ $\boxed{\text{converge normalement sur } I}$ puisque $\|u_n\|_\infty^I \leq \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ et que le terme majorant est celui d'une STP notoirement convergente (cf cosinus hyperbolique).

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur le segment I à notre série de fonctions et celui-ci fournit :

$f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} (\int_0^\pi u_n(t)dt) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n} W_n}{(2n)!}$.

Finalement pour tout réel x : $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{W_n}{(2n)!} x^{2n}}$.

Cette égalité montre que f est DSE sur $\mathbb{R}$ et donne par ailleurs son DSE$\square$

7) et 8) Considérons la suite b_n (que l'on déterminera plus loin) définie par $b_0 = 1$ et $b_n = -\dfrac{b_{n-1}}{(2n)^2}$, ce pour tout $n \geq 1$.

[1]Astronome contemporain et correspondant de Gauss

Par $Q5$ si m est solution DSE de E, alors $m(x) = m(0)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n})$.

Par ce biais et avec Q6, on répond à Q7. Avec une récurrence simple, on montre que $\boxed{b_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}}$, pour tout n.

Par unicité du DSE de f, il vient et pour tout n : $(-1)^n \frac{W_n}{(2n)!} = \pi \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$ donc $\boxed{W_n = \pi \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}$ $\blacksquare$

Exercice 3 (Polynômes de Legendre)

Dans tout l'exercice, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
Pour tout entier naturel n, on pose $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

Partie A : Etude d'un endomorphisme
Pour tout $P \in E$, on pose :

$$\phi(P) = (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X).$$

1. Justifier qu'on a ainsi défini un endomorphisme ϕ de E.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, le sous-espace vectoriel E_n est stable par ϕ.

Partie B : Les polynômes de Legendre
Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme L_n par :

$$L_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (\binom{n}{k})^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

On pose aussi dans le même contexte $U_n = (X^2 - 1)^n$.

3. Préciser le degré de L_n, ce pour tout n. Déterminer L_k pour $k \in [\![0, 3]\!]$.

4. Vérifier à l'aide de la formule de Leibniz que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}.$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$ pour la suite de cette partie.

5. Vérifier que :

$$\left(X^2 - 1\right) U_n' = 2nXU_n.$$

6. En dérivant $n+1$ fois la relation précédente , montrer que :

$$\phi(L_n) = n(n+1)L_n.$$

7. Que pouvez vous en déduire pour l'endomorphisme de E_n induit par ϕ?

Partie C : Définition d'un produit scalaire

On pose, pour tout $(P, Q) \in E^2$, : $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx.$

8. Justifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Dans toute la suite de l'exercice, l'espace E et ses sous-espaces E_n ($n \in \mathbb{N}$) seront systématiquement munis de ce produit scalaire.

9. Montrer que :
$$\forall (P,Q)\in E^2, <\phi(P),Q>=\int_{-1}^{1}(1-x^2)P'(x)Q'(x)dx.$$

10. Déduire de la question précédente et de la fin de la partie B que les polynômes L_n sont deux à deux orthogonaux.

11. Déterminer une base orthonormée de E_3.

12. Calculer, pour $k\in [\![0,2]\!]$, $d(X^3,E_k)$. Que constatez vous?

13. On note G l'ensemble des polynômes de degré 3 et de coefficient dominant 1.
Montrer l'existence du réel $\min\limits_{P\in G}(\int_{-1}^{1}P^2(x)dx)$.
Préciser sa valeur et donner les polynômes réalisant ce minimum.

Solution :
1) La linéarité de ϕ provient de celle de la dérivation et de plus ϕ est bien à valeurs dans E. Ainsi $\boxed{\phi\in L(E)}\square$
2) Il suffit d'observer que si $deg(P)\leq n$ alors $\boxed{deg(\phi(P))\leq n}\square$
3) L_n est somme de polynômes de degré n et son coefficient de degré n est strictement positif donc $\boxed{deg(L_n)=n}$, ce pour tout $n\square$
On a par la suite $\boxed{L_0=1}$, $\boxed{L_1=X}$, $\boxed{L_2=\dfrac{3X^2-1}{2}}$ et $\boxed{L_3=\dfrac{5X^3-3X}{2}}\square$
4) Par la formule de Leibniz : $(U_n)^{(n)}=((X-1)^n(X+1)^n)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}((X-1)^n)^{(k)}((X+1)^n)^{(n-k)}$ donc $(U_n)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!\binom{n}{k}(X-1)^{n-k}(n-k)!\binom{n}{n-k}(X+1)^k=n!\sum\limits_{k=0}^{n}(\binom{n}{k})^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k$ d'où $\boxed{L_n=\dfrac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}}$, ce pour tout $n\in\mathbb{N}\square$
6) En suivant l'indication donnée (et en utilisant à nouveau la formule de Leibniz déjà employée) et pour tout n :
$(X^2-1)(U_n)^{(n+2)}+2(n+1)X(U_n)^{(n+1)}+(n+1)n(U_n)^{(n)}=2nX(U_n)^{(n+1)}+2(n+1)n(U_n)^{(n)}$ ce qui donne aussi
(en posant $(U_n)^{(n)}=a_nL_n$, où $a_n=2^nn!$) $a_n((X^2-1)L_n''+2(n+1)XL_n'+n(n+1)L_n-2nXL_n'-2n(n+1)L_n)=0$.
$a_n\neq 0$ donc $(X^2-1)L_n''+2XL_n'=n(n+1)L_n$ soit aussi $\boxed{\phi(L_n)=n(n+1)L_n}\square$
7) Cet endomorphisme est diagonalisable car possède $n+1$ valeurs propres distinctes deux à deux par la question précédente (chaque L_k étant non nul) et agissant sur un ev de dimension $n+1\square$
8) C'est du cours$\square$
9) Par IPP il vient $\forall(P,Q)\in E^2, <\phi(P),Q>=\left[(x^2-1)P'(x)Q(x)\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}(1-x^2)P'(x)Q'(x)dx\square$
10) Prenons $n\neq m$ alors $<\phi(P_n),P_m>=n(n+1)<P_n,P_m>$ grâce à 6).
De même $<\phi(P_m),P_n>=m(m+1)<P_n,P_m>$.
La question précédente montre l'égalité de ces produits scalaires donc $n(n+1)<P_n,P_m>=m(m+1)<P_n,P_m>$ soit $\boxed{<P_n,P_m>=0}$ puisque n et m sont des entiers naturels différents$\square$
11) La famille (L_0,L_1,L_2,L_3) est donc une famille orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$ constituée de vecteurs tous non nuls.
Il nous suffit de les normer et donc pour cela de calculer chacune des normes.
$\|L_0\|=\sqrt{2}$, $\|L_0\|=\sqrt{2}$, $\|L_1\|=\sqrt{2/3}$, $\|L_2\|=\sqrt{2/5}$ etc...ainsi en posant $\boxed{T_i=\dfrac{1}{\sqrt{2/2i+1}}L_i}$ pour $i\in[\![0,3]\!]$, on dispose en $(T_0,...,T_3)$ d'une b.on de E_3 $\square$
12) Dès lors on sait que $\boxed{X^3=\sum\limits_{i=0}^{3}<X^3,T_i>T_i}$. On peut aussi observer que les T_i (comme les L_i) sont de la

parité de i, ce qui implique que $< X^3, T_i >= 0$ pour i pair (imparité intégrande sur un intervalle symétrique par rapport à 0). Il en résulte que $X^3 =< X^3, T_3 > T_3 + < X^3, T_1 > T_1$ et que $\boxed{d(X^3, E_0) = \left\|X^3\right\| = \sqrt{2/7}}$, $\boxed{d(X^3, E_k) = | < X^3, T_3 > | = \frac{4}{35}\sqrt{\frac{2}{7}}}$ sinon $\square$

13) Tout polynôme P de G s'écrit $P = \frac{2}{5}L_3 + Q$, où $Q \in E_2$. Par Pythagore $\|P\|^2 = \frac{8}{175} + \|Q\|^2$, on voit donc que ce minimum existe qu'il vaut $\boxed{\frac{8}{175}}$ et qu'il est atteint uniquement pour le polynôme $\boxed{\mathrm{X}^3 - \frac{3}{5}X}$ $\blacksquare$

FIN !!