

Corrigé du DS4 (4h) : Mines

- La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés.
- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert et bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de certaines fonctions définies sur $[0, +\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$.

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties I et II.

Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on appelle *fonction polynomiale sur I* toute fonction de la forme $f : I \rightarrow$

$\mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$, où n est un entier naturel et $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des nombres réels.

I. Résultats préliminaires

I.1. Etude d'une série entière

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie, et à valeurs strictement positives.
2. À l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera avec soin, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit α un réel strictement supérieur à -1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
4. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \text{ pour tout } x \in]-R, R[.$$

On pourra effectuer une permutation des symboles $\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\int_0^{+\infty}$, que l'on justifiera soigneusement.

Solution :

Q1. On pose, pour $x > 0$ fixé et tout $t > 0$, $f(t) = t^{x-1} e^{-t}$.

On observe successivement que :

i) f est continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

ii) En 0 $f(t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ et $t \rightarrow \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ puisque $1-x < 1$.

Par comparaison, il en va de même pour f .

ii) En $+\infty$ la règle du t^2 montre que $f \in L^1([1, +\infty[$.

Ainsi f est intégrable sur I et Γ s'en trouve définie sur ce même intervalle.

La continuité, la positivité sur I et le caractère non identiquement nul de f font que $\int_I f > 0$. Soit $\Gamma(x) > 0$

pour tout $x \in I$ □

Q2. On pose pour , pour $x > 0$ fixé et tout $t > 0$, $g(t) = -t^x e^{-t}$.

L'exponentielle et les fonctions puissances sont C^∞ sur I .

Le crochet généralisée $\left[-e^{-t}t^x\right]_0^\infty$ existe car $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ (par croissance comparée) et $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ (grâce à $x > 0$) et vaut $\boxed{0 - 0 = 0}$.

L'intégrale généralisée $\Gamma(x+1)$ convergeant, le théorème d'IPP généralisé peut lui être appliqué et donne l'égalité :

$$\Gamma(x+1) = \left[-e^{-t}t^x\right]_0^\infty - \int_0^{+\infty} (-e^{-t}(xt^{x-1}))dt \text{ soit } \boxed{\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)} \quad \square$$

Q3. La fonction Γ ne s'annulant pas, notre série entière (pas de problème de définition pour a_n puisque $n + \alpha + 1 > n \geq 0$) est non lacunaire. La règle de d'Alembert pour les S.E peut s'employer.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1+\alpha}{n+1}, \text{ ce par Q2.}$$

Il en résulte que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ donc que $\boxed{R=1}$ □

Q.4 On fixe x tel que $|x| < 1$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$, $u_n(t) = \frac{x^n}{n!} t^n (e^{-t} t^\alpha)$.

D'après Q.1 ces fonctions sont intégrables sur $\boxed{I = \mathbb{R}_+^*}$ et par définition de a_n , on a $\boxed{\int_I u_n = a_n x^n}$, ce pour

tout $n \in \mathbb{N}$. Observons aussi que $\int_I |u_n| = a_n |x|^n$ donc que $\boxed{\text{la condition de Lebesgue}}$ pour notre série de fonction est satisfaite (puisque une série entière converge absolument sur son intervalle ouvert de convergence).

Reste à nous occuper de la convergence simple sur I de la série de fonction $\sum_{n \geq 0} u_n$. Celle-ci découle de la

$$\text{convergence sur } \mathbb{R} \text{ de la série exponentielle et on a : } \boxed{\forall t > 0, \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = e^{xt}(e^{-t}t^\alpha) = e^{-t(1-x)}t^\alpha = h(t)}.$$

Comme h est à l'évidence continue (donc CM) sur I , nous pouvons intégrer terme à terme sur I la série de fonction $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Ce qui donne : i) l'intégrabilité sur I de h et ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n = \int_I h$.

Le changement de variable affine $t = \frac{u}{1-x}$ dans la dernière intégrale donne $\int_I h = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}$ d'où l'égalité voulue ■

I.2. Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$. On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E .

5. Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F .

On fixe $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F , et x un vecteur de E .

6. Montrer que $\pi_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.

7. Montrer enfin que

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2.$$

Solution :

Q5. Pour tout x de E il existe un et un seul $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$. π_F est l'application qui à x associe cet y □

Q6. $\boxed{\text{C'est dans le cours}}$ □

Q7. Comme rappelé en Q5. $\pi_F(x)$ et $x - \pi_F(x)$ sont orthogonaux donc par $\boxed{\text{le théorème de Pythagore}}$:

$$\|\pi_F(x)\|^2 + \|x - \pi_F(x)\|^2 = \|\pi_F(x) + x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 \text{ de plus le caractère orthonormé de la base } (e_1, \dots, e_n)$$

et Q6. font que $\|\pi_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$. Ce qui donne bien la relation exigée ■

II. Polynômes de Laguerre

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ est convergente.

8. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.
9. En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α , l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx$ est convergente.
10. En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
11. Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α .

Pour tout entier naturel n , on définit les fonctions :

$$\varphi_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{n+\alpha} e^{-x}$$

et

$$\psi_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x)$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

12. Calculer ψ_0 , ψ_1 et ψ_2 .
13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élément de E_α , ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx.$$

14. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α .

Dans la suite, on note $\|\cdot\|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire.

15. Soit n un entier ≥ 1 . Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, établir que

$$\varphi_n^{(k)}(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives,}$$

et que

$$\varphi_n^{(k)}(x) = o(e^{-x/2}) \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

16. Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx.$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

17. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \Gamma(n + \alpha + 1)$ (la fonction Γ a été définie dans la partie I).

Solution :

Les questions 8), 9), 10) et 14) ont été traitées en cours et/ou en exercice $\square$

Q11. Reprendre les arguments pour prouver l'existence de la fonction Gamma (cf Q1) $\square$

Pour les deux questions suivantes on peut dériver légitimement à tour de bras puisque l'exponentielle et les fonctions puissances sont indéfiniment dérivables sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

Q12. Sans difficulté et pour tout $x > 0$:

$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_1(x) = -x + \alpha + 1 \quad \text{et} \quad \psi_2(x) = x^2 - 2(\alpha + 2)x + (\alpha + 1)(\alpha + 2) \quad \square$$

Q13. On utilise à cette fin la formule de Leibniz donnant la dérivée n -ième d'un produit. Elle conduit ici pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ à :

$$\varphi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{-x} k! \binom{n+\alpha}{k} x^{n+\alpha-k} \quad \text{donc} \quad \psi_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k! \binom{n}{k} \binom{n+\alpha}{k} x^{n-k}. \quad \text{Ce qui}$$

montre bien que ψ_n est polynomiale, [de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$] $\square$

Pour les trois questions suivantes n, m sont des entiers naturels.

Q15. Avec la formule de Leibniz à nouveau, on voit que $\varphi_n^{(k)}$ est une combinaison linéaire des φ_p , où $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui donne ces résultats puisque chaque possède ces comportements en 0 et en $+\infty$ $\square$

Q16. On procède à n IPP successives sur $\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx$ (qui converge par Q11.) en dérivant systématiquement φ_n . Par Q15 tous les crochets généralisés existent et sont nuls; de façon plus précise on a $\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n-k)}(x) \varphi_n^{(k)}(x) dx$ à la suite de $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ IPP.

Ainsi pour $k = n$ il vient : $\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m(x) \varphi_n^{(n)}(x) dx$.

Comme $\varphi_n^{(n)}(x) = x^\alpha e^{-x} \psi_n(x)$, ce pour tout réel $x > 0$, on a bien (par définition du PS) :

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx \quad \square$$

Léger hors-programme (les familles de vecteurs en PC sont nécessairement finies) pour la seconde partie mais on comprend qu'il faut montrer que $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0$ pour $n \neq m$.

On peut supposer sans perte de généralité $n > m$ dès lors $\psi_m^{(n)} = 0$ pour des raisons de degré assez criantes et l'égalité prouvée ci-dessus donne bien la nullité désirée $\square$

Q17. On applique l'encadré précédent à $m = n$. Grâce à Q13 : $\psi_n^{(n)} = (-1)^n n!$ et ainsi $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} dx = n! \Gamma(n + \alpha + 1)$ $\blacksquare$

III. Approximation

On conserve les hypothèses et notations de la partie II. Pour tout entier naturel k , on définit la fonction

$$f_k : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{-kx},$$

qui est élément de E_α (on ne demande pas de le vérifier).

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0 \leq n \leq N}$, et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N .

18. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$, et calculer sa valeur.

19. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

20. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$. Il est facile de vérifier (ce n'est pas demandé) que $f \in E_\alpha$.

21. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n ainsi que des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

On pourra utiliser la fonction

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et le résultat **admis** suivant : si $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $|\phi(t) - p(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$.

22. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

23. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ ($A > 0$). Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 dx \leq \varepsilon.$$

On pourra appliquer le résultat de la question 22 à la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto h(\sqrt{x})e^{\frac{x}{2}}$ et à un α bien choisi.

On peut montrer que le résultat de la question 23 est en réalité valable pour toute fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

Solution :

Observons que si on pose $e_n = \frac{1}{\|\psi_n\|_\alpha} \psi_n$, ce pour tout n , $(e_0, \dots, e_N)$ est une b.on de V_N . Par conséquent en utilisant les résultats de la partie II (ceci étant valable pour tout N) :

$$\begin{aligned} \text{a) } \pi_N(f_k) &= \sum_{n=0}^N \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle}{\|\psi_n\|_\alpha^2} \psi_n. \\ \text{b) } \|\pi_N(f_k)\|_\alpha^2 &= \sum_{n=0}^N \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}. \\ \text{c) } \|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 &= \|f_k\|_\alpha^2 - \sum_{n=0}^N \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}. \\ \text{d) } \text{Donc } \sum_{n=0}^N \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} &\leq \|f_k\|_\alpha^2. \end{aligned}$$

Q18. On constate que cette série est à termes positifs et que le c) (ci-dessus) montre que la suite de ses sommes partielles est majorée. Nous en déduisons la convergence de la série en question (dont le TG sera noté b_n), on peut aussi affirmer, par conservation des inégalités à la limite, que sa somme est inférieure à $\|f_k\|_\alpha^2$.

Pour tout n , $\langle f_k, \psi_n \rangle = \int_0^\infty e^{-kx} \varphi_n^{(n)}(x) dx$ donc en procédant (par IPP répétées) comme en Q.16, nous obtenons $\langle f_k, \psi_n \rangle = k^n \int_0^\infty e^{-kx} \varphi_n(x) dx = k^n \int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-(k+1)x} dx$ et, en posant $u = (k+1)x$:

$\langle f_k, \psi_n \rangle = \frac{k^n}{(k+1)^{n+\alpha+1}} \Gamma(n+\alpha+1)$ et (avec Q17.) $b_n = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} a_n y^n$, où on a posé $y = (\frac{k}{k+1})^2$ sachant aussi que a_n a été défini dans la partie I.

Il résulte de ceci que $\sum_{n=0}^\infty b_n = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} = \sum_{n=0}^\infty a_n y^n$, il suffit pour finir d'utiliser Q.4 (on aura plaisir à remarquer que $0 \leq y < 1$) et d'affirmer que :

$$\sum_{n=0}^\infty b_n = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \Gamma(\alpha+1)(k+1)^{\alpha+1} \text{ soit enfin } \boxed{\sum_{n=0}^\infty \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)^{\alpha+1}}} \square$$

Q19. Un calcul simple donne $\|f_k\|_\alpha^2 = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)^{\alpha+1}}$ donc en utilisant le c) et Q18 on a immédiatement ce résultat $\square$

Q20. Traduction epsilonesque de Q.19 mais la formulation de la question est très équivoque (on pourrait comprendre que p soit le même pour tout k) $\square$

Pour aborder sereinement la question suivante remarquons que $\|\psi_0\|_\alpha^2 = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = \int_0^1 |\ln(t)|^\alpha dt$ (via le changement de variable légitime $x = -\ln(t)$, où $t \in]0, 1]$).

En particulier $\int_0^1 |\ln(t)|^\alpha dt$ converge et sa valeur (Q17. pour $n = 0$) est $\boxed{\Gamma(\alpha+1)}$ $\square$

Q21. g étant continue sur $[0, 1]$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $|g(t) - p(t)| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{\Gamma(\alpha + 1)}}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Définissons $p = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$ et évaluons $J = \int_0^\infty (f(x) - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(x))^2 x^\alpha e^{-x} dx$ en posant à nouveau $x = -\ln(t)$,

où $t \in]0, 1]$; ceci donne $J = \int_0^1 ((g(t) - p(t))^2 |\ln(t)|^\alpha dt \leq \epsilon^2$ d'où $\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \epsilon$ $\square$

Q22. On part du résultat établi en Q21 et grâce à Q20, appliquée à chaque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe $p_k \in \mathcal{P}$ tel que $\|f_k - p_k\|_\alpha \leq \frac{\epsilon}{(n+1)(|\lambda_k| + 1)}$. On pose alors $p = \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k$ et $\|f - p\|_\alpha \leq \left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha +$

$\sum_{k=0}^n |\lambda_k| \|f_k - p_k\|_\alpha$, ce par inégalités triangulaires.

Donc on a bien $p \in \mathcal{P}$ et $\|f - p\|_\alpha \leq 2\epsilon$ $\square$

Q23. On prend $\alpha = 1/2$; la fonction f proposée par l'énoncé appartient à E_α (puisque continue et nulle au voisinage de $+\infty$); en lui appliquant le résultat précédent, on peut trouver $p \in \mathcal{P}$ et $\|f - p\|_\alpha \leq \sqrt{\epsilon}$ donc

$$\int_0^\infty (h(\sqrt{x})e^{\frac{x}{2}} - p(x))^2 \sqrt{x} e^{-x} dx \leq \epsilon \text{ ou } \int_0^\infty (h(\sqrt{x}) - p(x)e^{-\frac{x}{2}})^2 \sqrt{x} dx \leq \epsilon.$$

On pose alors dans cette dernière intégrale $x = t^2$, où $t \geq 0$ (changement de variable légitime) et donne :

$2 \int_0^\infty (h(t) - p(t^2)e^{-\frac{t^2}{2}})^2 dt \leq \epsilon$, la parité de h permet de réinterpréter l'inégalité précédente et d'affirmer que $\int_{-\infty}^\infty (h(t) - p(t^2)e^{-\frac{t^2}{2}})^2 dt \leq \epsilon$ et de répondre à cette dernière question $\blacksquare$

FIN DU SUJET