Corrigé du DS4 (4h) : X

• La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés.
• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert et bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

⋆ ⋆ ⋆

Polynômes orthogonaux et équations différentielles

Premiére partie

Dans cette partie on désigne par E un espace préhilbertien , par $< .,. >$ son produit scalaire et par $\|.\|$ la norme correspondante. On note $F^\perp$ le sous-espace vectoriel orthogonal d'une partie F de E.

1. Dans cette question on suppose E de dimension finie, on se donne un sous-espace vectoriel F de E, un vecteur v de E n'appartenant pas à F, et un nombre réel $\alpha > 0$.
   On note π le projecteur orthogonal $E \to F$.

   Construire un élément u de F et un réel λ tels que l'élément $u + \lambda v$ soit orthogonal à F et satisfasse les deux conditions suivantes :
   $$< u + \lambda v, v > \in \mathbb{R}_+^*, \ \|u + \lambda v\| = \alpha.$$
   Démontrer l'unicité du couple (u, λ) et comparer $u + \lambda v$ avec la projection orthogonale de v sur $F^\perp$

2. Soit n un entier, $n \geq 1$. Soit $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de vecteurs de E et soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille de nombres réels strictement positifs. Pour tout p, $0 \leq p \leq n$, on désigne par E_p le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(v_0, v_1, \dots, v_p)$. Montrer qu'il existe une unique base $(w_0, w_1, \dots, w_n)$ de E_n vérifiant les conditions suivantes : $w_0 \in E_0$; pour tout p, $1 \leq p \leq n$, $w_p \in E_p \cap E_{p-1}^\perp$; pour tout p, $0 \leq p \leq n$, $< w_p, v_p > \in \mathbb{R}_+^*$ et $\|w_p\| = \alpha_p$.
   Solution :
   Q1. Posons (avec des notations classiques) $v = v_F + v_{F^\perp}$; on cherche donc $u \in F$ et λ réel tels que $u + \lambda v_F = 0_E$, $< u + \lambda v, v > = \lambda \|v_{F^\perp}\|^2 > 0$ et $\|u + \lambda v\| = |\lambda| \, \|v_{F^\perp}\| = \alpha$. De ceci on récupère l'unique couple $\boxed{\left(\lambda = \frac{\alpha}{\|v_{F^\perp}\|}, u = -\frac{\alpha}{\|v_{F^\perp}\|} v_F\right)}$.
   NB : $\|v_{F^\perp}\| > 0$ puisque $v \notin F$□
   Enfin $\boxed{u + \lambda v = \frac{\alpha}{\|v_{F^\perp}\|} v_{F^\perp}}$■
   Q2. w_0 est déterminé, il est égal à $\boxed{\frac{\alpha_0}{\|v_0\|} v_0}$ (ceci ayant du sens puisque $v_0 \neq 0_E$ en tant que membre d'une famille libre de E).
   On suppose $(w_0, ..., w_p)$ base de $F = E_p$ déterminée et respectant les contraintes exigées jusqu'à l'ordre $p \leq n - 1$. On va montrer qu'il existe un unique w_{p+1} prolongeant ses contraintes à l'ordre $p + 1$ (Récurrence initialisée plus haut).
   On pose $v = v_{p+1} \notin F$ et on veut que ce nouveau vecteur appartienne à $E_{p+1} = Vect(v) \oplus F$; ce qui permet de l'écrire $w_{p+1} = \lambda v + u$, où $u \in F$.
   Les contraintes sont alors $u + \lambda v \in F^\perp$, $< u + \lambda v, v > \in \mathbb{R}_+^*$, $\|u + \lambda v\| = \alpha$. Q1 permet de prouver qu'il existe un et seul couple (λ, u) les satisfaisant, dès lors l'existence et l'unicité de w_{p+1} sont garanties ($\lambda \neq 0$ donc $w_{p+1} \notin F$) et la récurrence se poursuit■

Deuxième partie

Dans cette partie on désigne par I le segment $[a,b]$, où $a<b$, par $C(I)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur I.
On considère $E=\mathbb{R}[X]$ et $E_n=\mathbb{R}_n[X]$ (pour tout $n\in\mathbb{N}$) comme des sous-espaces vectoriels de $C(I)$.
On se donne une forme linéaire ϕ sur $C(I)$ telle que $\phi(f)$ soit positif ou nul si f est positive ou nulle, et strictement positif si de plus f n'est pas identiquement nulle.
On note encore $(\alpha_0,\alpha_1,\dots)$ une suite de nombres réels strictement positifs.

3. Démontrer les assertions suivantes :
   (a) La formule $<f,g>=\phi(fg)$ définit un produit scalaire sur $C(I)$.
   (b) Il existe une unique suite de polynômes $(P_0,P_1,\dots)$ de E satisfaisant les conditions suivantes :
      - P_n appartient à E_n et le coefficient de x^n dans P_n, qu'on notera k_n, est strictement positif ;
      - $\phi(P_mP_n)=0$ si $m\neq n$;
      - $\phi(P_n^2)=\alpha_n^2$.
4. (a) Montrer qu'il existe, pour tout $n\geq 2$, des réels A_n, B_n, C_n, tels que l'on ait
   $$P_n(x)=(A_nx+B_n)\,P_{n-1}(x)+C_nP_{n-2}(x).$$
   (b) Exprimer A_n en fonction de k_n et k_{n-1}, puis C_n en fonction de k_n, k_{n-1}, k_{n-2}, α_{n-1}, α_{n-2}.
5. On se propose ici de démontrer que, pour $n\geq 1$, tous les zéros de P_n sont réels, simples et contenus dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. Pour cela on examinera les deux possibilités suivantes :
   (a) Il n'existe aucun zéro de P_n, contenu dans $]a,b[$, de multiplicité impaire ; dans ce cas, on calculera $\phi(P_n)$;
   (b) Il existe de tels zéros, que l'on note a_1, ..., a_r (chacun étant compté une seule fois) ; dans ce cas, on calculera $\phi(Q_n)$ où $Q_n(x)=P_n(x)(x-a_1)\dots(x-a_r)$.
6. Dans cette question on fixe un entier $n\geq 1$; on note a_1, ..., a_n les zéros de P_n ; pour tout G de E_{2n-1}, on écrit $G=QP_n+R$ la division euclidienne de G par P_n.
   (a) Vérifier que Q et R appartiennent a E_{n-1}.
   (b) On définit des polynômes L_i, $i=1,\dots,n$, par
   $$L_i(x)=\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}.$$
   Vérifier que l'on a
   $$R(x)=\sum_{i=1}^{n}R(a_i)L_i(x).$$
   (c) Déterminer des réels λ_1, ..., λ_n tels que l'on ait, pour tout G de E_{2n-1} :
   $$\phi(G)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iG(a_i).$$
   (d) Quel est le signe de λ_i ?

Solution :
NB : $\boxed{E_{-1}=\{0\}}$.
Q3.a) Evident à partir des propriétés de $\phi\square$
b) On applique Q2. avec $v_i=X^i$, où $i\in\mathbb{N}$ et E muni du PS défini en a).
On met donc en évidence une unique suite de polynômes (P_n) telle que :
i) $\forall n\in\mathbb{N}$, $(P_0,...,P_n)$ base de E_n (ce qui montre que $deg(P_n)=n$).
ii) $\forall n\in\mathbb{N}$,$\phi(P_n^2)=\alpha_n^2$. iii) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\phi(X^nP_n)>0$.
iv) De plus si $i<j$ alors $<Pi,P_j>=0$ car $P_j\in E_j$ et $P_i\in E_{j-1}$.
L'unicité est donc assurée pour l'existence reste à vérifier que le coefficient dominant de P_n (noté k_n) est bien strictement positif.
On peut observer que $P_n=k_nX^n+Q$, où $Q\in E_{n-1}$. Ainsi $<P_n,P_n>=k_n<P_n,X^n>+<P_n,Q>$ soit $\alpha_n^2=k_n<P_n,X^n>$, on conclut avec iii)$\square$

Q4.Fixons un entier $n \geq 2$.
Remarquons que si U, V, W dans E alors $< UV, W >= \phi(UVW) =< U, VW >$ (£).
a) On effectue la division euclidienne de P_n par P_{n-1} en notant Q_n (resp. R_n) le quotient (resp. le reste). Grâce à ii) de Q3b), il vient $deg(Q_n) = 1$ et $deg(R_n) \leq n-2$.
On pose donc $Q_n = A_n X + B_n$ et $R_n = C_n P_{n-2} + T_n$, où $T_n \in E_{n-3}$.
$< P_n - (A_n X + B_n) P_{n-1}, T_n >= 0 - < P_{n-1}, (A_n X + B_n) T_n >$ par orthogonalité de P_n et T_n et (£) mais $< P_{n-1}, (A_n X + B_n) T_n >= 0$ puisque $(A_n X + B_n) T_n \in E_{n-2}$. On en tire donc que $< P_n - (A_n X + B_n) P_{n-1}, T_n >=< C_n P_{n-2} + T_n, T_n >= 0$ soit enfin $< T_n, T_n >= 0$ et ainsi $T_n = 0$.
Il en résulte que l'on a déterminé trois reéls A_n, B_n et C_n tels que : $\boxed{P_n = (A_n X + B_n) P_{n-1} + C_n P_{n-2}}$$\square$
b) L'exament des coefficients dominants de chaque membre de l'égalité précédente donne $k_n = A_n k_{n-1}$ donc $\boxed{A_n = \dfrac{k_n}{k_{n-1}}}$.
En effectuant le produit scalaire de chaque membre de l'égalité 4)a) avec P_{n-2}, nous obtenons (en utilisant l'orthogonalité de la famille (P_k) et (£)): $0 = A_n < P_{n-1}, X P_{n-2} > + \alpha_{n-2}^2 C_n$.
On a aussi $X P_{n-2} = \dfrac{k_{n-2}}{k_{n-1}} P_{n-1} + H$, où $H \in E_{n-2}$ donc $< P_{n-1}, X P_{n-2} >= \dfrac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \alpha_{n-1}^2$. Finalement $\boxed{C_n = -\dfrac{k_{n-2} k_n}{(k_{n-1})^2} \dfrac{\alpha_{n-1}^2}{\alpha_{n-2}^2}}$$\square$
Q5.a) Dans ce cadre les zéros réels situés dans $J =]a, b[$ sont de multiplicité paire donc P_n est de signe constant sur I mais $\phi(P_n) = \dfrac{1}{P_0} \phi(P_n P_0) = 0$ puisque $n \geq 1$. Ces propriétés combinées (appliquées à $\pm P_n$) donneraient P_n nulle sur I ce qui est incompatible avec son degré$\square$.
b) Posons $W = \prod_{i=1}^{r} (X - a_i)$.
Si $r < n$ alors ($P_n \in E_r^{\perp}$) $\phi(Q_n) =< P_n, W >= 0$ mais Q_n est dans la configuration du a) qui est absurde. Nécessairement $r = n$ et on a bien prouvé l'assertion en vue$\square$.
Q6.a)Evident$\square$.
b) C'est dans le cours (Interpolation de Lagrange)$\square$.
c) On applique ϕ aux deux membres de l'égalité $G = Q P_n + R$, comme $\phi(Q P_n) = 0$ ($Q \in E_{n-1}$) et en utilisant le b), il vient $\boxed{\phi(G) = \sum_{i=1}^{n} G(a_i) \phi(L_i)}$ donc en posant $\lambda_i = \phi(L_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a le résultat désiré$\square$.
d)On utilise le c) en prenant ($i \in [\![1, n]\!]$ fixé) $G = L_i^2$, ce qui donne $\boxed{\lambda_i = \phi(L_i^2) > 0}$ puisque $L_i \neq 0$$\blacksquare$

Troisième partie

Dans cette partie on prend $I = [-1, 1]$, $\alpha_n = 1$ pour tout $n \geq 0$, et $\phi(f) = \int_{-1}^{1} f(x) dx$ pour tout f de $C(I)$. On considère les fonctions F_n définies par $F_0(x) = 1$ et pour $n \geq 1$,
$$F_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right).$$

7. Préciser le degré de F_n et calculer $F_n(1)$, $F_n'(1)$, $F_n(-1)$, $F_n'(-1)$. [On pourra utiliser la formule de Leibniz donnant $\dfrac{d^n}{dx^n} ((x+1)^n (x-1)^n)$].

8. Montrer que F_n est proportionnel au polynôme P_n introduit à la question **3.b)**. [On ne demande pas de préciser le coefficient de proportionnalité].

On désigne par $C^2(]-1, 1[)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles deux fois continûment dérivables sur $]-1, 1[$ et par T l'application linéaire de $C^2(]-1, 1[$ dans $C(]-1, 1[$ définie par
$$T(f)(x) = \frac{d}{dx} \left((x^2 - 1) \frac{df}{dx} \right).$$

9. Vérifier que $T(F_n)$ est proportionnel à F_n.

10. Déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de l'endomorphisme de E_n, restriction de T à E_n.

11. On fixe un nombre réel γ et on s'intèresse aux solutions de l'équation différentielle

$$T(f) - \gamma f = 0(1)$$

qui sont développables en séries entières de la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

   (a) Ecrire une relation de récurrence entre c_k et c_{k+2}.

   (b) Etudier la convergence des deux séries entières, paire et impaire : $\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p}x^{2p}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p+1}x^{2p+1}$.
   Dire dans quels cas ce sont des polynômes et reconnaître ces polynômes.

   (c) Décrire l'espace des solutions de (1) dans $C^2(]-1,1[)$.

   (d) Que se passe-t-il si l'on remplace l'intervalle ouvert $]-1,1[$ par le segment $[-1,1]$?

Solution :
On pose $U_n = (X+1)^n$ et $V_n = (X-1)^n$.
Les dérivées d'ordre strictement inférieur à n de U_n (resp. de V_n) sont nulles en -1 (resp. en 1).
D désignera l'opérateur de dérivation pour ne pas utiliser le lourd formalisme des dérivées partielles.
($\heartsuit$) La formule de Leibniz montre que $D^p(U_nV_n)$ s'annule en ± 1 dès que $p < n$.
Q7. On suppose $n \geq 1$ sinon...
F_n étant obtenu après n dérivations d'un polynôme de degré $2n$, on a $\boxed{deg(F_n) = 2n - n = n}\square$
La formule de Leibniz indique par ailleurs que $F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(U_n)D^{n-k}V_n$.
En spécialisant en 1 : $\boxed{F_n(1) = 2^n n!}$, ce avec le préambule.
En spécilisant en -1 : $\boxed{F_n(-1) = (-1)^n 2^n n!}$.
Toujours avec Leibniz : $F_n' = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} D^k(U_n)D^{n+1-k}V_n$.
Avec la même démarche : $\boxed{F_n'(1) = n(n+1)!2^{n-1}}$ et $\boxed{F_n'(-1) = (-1)^{n-1}n(n+1)!2^{n-1}}\square$
Q8. Il suffit grâce à Q2. (car chaque F_n est de degré n) de vérifier que la famille (F_n) est orthogonale.
Prenons $n < m$ des entiers naturels alors (avec n IPP successives et ($\heartsuit$)) :
$< F_n, F_m >= \int_{-1}^{1} D^n(U_nV_n)D^m(U_mV_m) = (-1)^m \int_{-1}^{1} D^{n+m}(U_nV_n)(U_mV_m) = 0$ (puisque $D^{n+m}(U_nV_n) = D^m(D^n(U_nV_n))$ et que $F_n = D^n(U_nV_n)$ est de degré $n\square$
Q9. Même démarche en posant $G_n = T(F_n)$. Ce sont des polynômes de degré n, il suffit comme en Q8. de montrer leur orthogonalité.
Pour $n > m$ entiers distincts : $< G_n, G_m >= \int_{-1}^{1} D((X^2-1)F_n')D((X^2-1)F_m') = -\int_{-1}^{1}(X^2-1)F_n'D^2((X^2-1)F_m')$ après une première IPP puis $< G_n, G_m >= \int_{-1}^{1} F_nD((X^2-1)D^2((X^2-1)F_m')) = 0$ puisque $deg(D((X^2-1)D^2((X^2-1)F_m')) < n\square$
Q10. Notons T_n l'endomorphisme induit par T sur E_n. La question précédente montre que l'on dispose en $(P_0, ..., P_n)$ d'une base de E_n faite de vecteurs propres de T_n.
Les espaces propres sont donc les droites vectorielles engendrées par ces polynômes.
Fixons $p \in [\![0, n]\!]$; la valeur propre associée à P_p est le facteur de proportionalité entre les coefficients dominants de P_p et $T(P_p)$; un simple coup d'oeil sur l'expression de T montre (car $deg(P_p) = p$) que celle-ci vaut $\boxed{p(p+1)}\square$

Q11. a) La méthode traditionnelle donne : $\boxed{c_{k+2} = \frac{k(k+1)-\gamma}{(k+1)(k+2)}c_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}\square$
b) La relation de récurrence précédente montre que les rayons de convergence de ces séries entières valent au moins $\boxed{1}\square$
Les solutions polynomiales sont celles pour lesquelles les c_k sont nuls APCR. On retrouve (à colinéarité près) les P_n ce uniquement pour $\gamma = n(n+1)\square$
c) La question précédente montre que cet espace vectoriel, noté Σ est au moins de dimension 2 (car engendré par les sommes de séries entières paire et impaire non nulles).

De façon plus précise en posant $S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}((2k+1)2k-\gamma)}{(2n)!} x^{2n}$ et

$S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(2k(2k-1)-\gamma)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, ce pour $x \in]-1,1[$, $Vect(S_1, S_2) \subset \Sigma$.

Le principe de Cauchy en 0 (fait admis, constante de votre programme) montre qu'il est au plus de dimension 2.

Bilan : $\boxed{\Sigma = Vect(S_1, S_2)}$ $\square$

Dans toute la suite k est un entier naturel sur lequel diverses considérations pourront être prises.