Corrigé du Concours blanc

• **La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés.**
• **Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert et bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats**
• **Ne pas utiliser de correcteur.**
• **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.**

1 L'opérateur Delta

1.1 Notations et intentions

On désigne par $E = \mathbb{C}[X]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \mathbb{K}_n[X]$.
Δ est l'endomorphisme de E qui à $P \in E$ associe $P(X+1) - P(X)$.

1.2 Etude algébrique de Δ

1) Prouver que chaque E_n est stable par Δ.
On note Δ_n l'endomorphisme de E_n induit par Δ.
2) Ecrire la matrice de Δ_2 dans la base canonique de E_2.
Δ_2 est-il diagonalisable?
Pouvez-vous généraliser en argumentant bien sûr?
3) a) Pour $P \in E$ comparer les degrés de P et de $\Delta(P)$.
On fixe un entier naturel $n \geq 1$.
b) Etablir que $Im(\Delta_n) \subset E_{n-1}$ et que $E_0 \subset Ker(\Delta_n)$.
c) En déduire image et noyau de Δ_n et de Δ.
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ dans la question suivante.
4) Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme u de E_n tel que $u \circ u = \Delta_n$.
On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.
a) Montrer que u et Δ^2 commutent.
b) En déduire que E_1 est stable par u.
c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ telle que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Conclure.
Solution :
1) On peut observer que $\Delta(X^k)$ est de degré $\leq k-1$, ce pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ceci implique la stabilité voulue$\square$
2) On note M cette matrice et on obtient sans peine $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Cette matrice est nilpotente et non nulle donc non diagonalisable. Cet argument vaut pour tout entier $n \geq 1$. En revanche Δ_0 étant l'endomorphisme nul, lui est diagonalisable$\square$
3)a) En se référant à la réponse donnée en 1), $deg(\Delta(P) = deg(P) - 1$ si $deg(P) \geq 1$ sinon $deg(\Delta(P) = -\infty\square$
b) Les deux inclusions découlent immédiatement du a)$\square$
c) On a donc par ce qui précède : $rg(\Delta_n) \leq n$ et $dim(Ker(\Delta_n)) \leq 1$ et, avec la formule du rang, ces

inégalités sont des égalités. Il en résulte que les inclusions du a) sont en fait des égalités.
De cela on déduit que $Im(\Delta) = E$ et $Ker(\Delta) = E_0\square$
4)a) u commutant avec $u \circ u$, u commute avec $\Delta_n\square$
b) C'est du cours$\square$
c) On peut procéder par calcul matriciel, cela ne présente aucune difficulté.
On peut observer que (par l'absurde) $A^4 = 0_2$ donc que A est nilpotente donc (Cayley-Hamilton) $A^2 = 0_2$; ce qui est évidemment aberrant$\square$
d) On recolle les morceaux : notons v l'endomorphisme de E_1 induit par u (cf b)), on a donc $v \circ v = \Delta_1$ et, en notant A la matrice de v dans la base canonique de E_1, on obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ce qui est absurde$\blacksquare$

1.3 Polynômes de Hilbert

On définit la famille (H_k) de E par :
i) $H_0 = 1$.
ii) $H_k = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X - j)$ si $k \in \mathbb{N}^*$.
On fixe un entier $n \geq 0$ pour les
5) Prouver que $(H_0, ..., H_n)$ est une base de E_n.
6) a) Déterminer $\Delta(H_0)$ puis $\Delta(H_k)$ en fonction de H_{k-1} pour $k \in [\![1, n]\!]$.
b) Montrer que, pour $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\Delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

.
Solution :
5) Comme ,pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $deg(H_k) = k$, on a affaire à une famille de $n + 1 = dim(E_n)$ libre (car échelonnée en degré) de E_n; c'est donc une base de $E_n\square$
6)a) Il vient $\Delta(H_0) = 0$ et, pour $k \geq 1$, $\Delta(H_k) = \dfrac{1}{k!}(\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X + 1 - j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X - j))$.
En procédant au changement d'indice $j = i + 1$ dans le premier produit et en revenant à l'indice initial, il vient :
$\Delta(H_k) = \dfrac{1}{k!}(\displaystyle\prod_{j=-1}^{k-2}(X - j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X - j)) = \dfrac{1}{k!}(\prod_{j=0}^{k-2}(X - j)(X + 1 - (X - k + 1)) = H_{k-1}\square$
b) Si $k > l$, alors $\delta^k(H_l) = 0$. Si $k \leq l$, alors (par a)) $\delta^k(H_l) = H_{l-k}$; ou bien $l < k$ auquel cas 0 est racine de H_{l-k} ou bien $l = k$ auquel cas $H_{l-k} = H_0 = 1$. La formule voulue en découle$\blacksquare$

1.4 Polynômes à valeurs entières

Dans les quatre questions qui suivent n est un entier naturel.
7) Soient $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas :
$k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \geq n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.
8) En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est à dire que H_n prend des valeurs entières sur les entiers.
9) Soit $P \in E_n$ à valeurs entières sur les entiers, montrer que $\Delta(P)$ possède la même propriété.
10) Montrer que $P \in E_n$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses composantes dans la base $(H_0, ..., H_n)$ sont des entiers relatifs.
11) Soit $P \in E$ de degré d et à valeurs entières sur les entiers. Etablir que $d!P$ est à coefficients entiers relatifs.
Etudier la réciproque.
Solution :
7) En suivant la disjonction de cas préconisée, il vient $H_n(k) = 0$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ puis $\boxed{H_n(k) = \binom{k}{n}}$ pour $k \geq n$ (ces deux cas peuvent se regrouper à l'aide de cette seule expression); enfin pour $k < 0$ et, en posant $k = -p$, nous obtenons $H_n(k) = (-1)^n \dfrac{p....(p + n - 1)}{n!} = \boxed{(-1)^n \binom{p+n-1}{n}}\square$

8) Résulte de 7) puisqu'un coefficient binomial est un entier naturel□
9) Soit $k \in \mathbb{Z}$ alors $k+1 \in \mathbb{Z}$ donc $P(k)$ et $P(k+1)$ sont des entiers relatifs ainsi que leur différence donc $\Delta(P)$ est bien à valeurs entières sur les entiers□
10) La condition sur les composantes est évidemment suffisante avec 8).

Montrons qu'elle est nécessaire en posant $P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$ et en fixant $j \in [\![0, n]\!]$.

D'après 6)b) $\Delta^j(P)(0) = a_j$ et c'est bien un entier avec 9)□

11) Par 10) on peut écrire $P = \sum_{i=0}^{d} a_i H_i$, où les a_i sont des entiers. Dès lors $d!P = \sum_{i=0}^{d} a_i(d!H_i)$ et comme $d!H_i \in \mathbb{Z}[X]$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ (puisque $\frac{d!}{i!} \in \mathbb{N}$), on a bien $d!P \in \mathbb{Z}[X]$.

Réciproque fausse (sans surprise) $P = \frac{X^2}{2}$ par exemple■

1.5 Caractérisation des suites $(P(k))$, où P est un polynôme

12) Soit (u_k) une suite à termes complexes. Prouver l'équivalence des assertions suivantes :
a) $\exists P \in E_n$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = P(k)$.
b) $\forall i \in \mathbb{N} \cap [n+1, +\infty[$, $\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} u_k = 0$.

Solution :
12) *a)* $\Longrightarrow$ *b)*?
Soit $i \geq n+1$. $\boxed{\text{Par considération de degré : } \Delta^i(P) = 0}$. Or $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$, $\Delta^2(P) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$ et, par récurrence éventuelle $\Delta^i(P) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} P(X+k)$ d'où b) en spécialisant en 0.
b) $\Longrightarrow$ *a)*?
$\boxed{\text{L'interpolation de Lagrange}}$ fournit l'existence et l'unicité d'un polynôme de E_n P tel que $P(k) = u_k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.
Supposons que $P(k) = u_k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ ($m \geq n$).
Alors b) appliqué à $i = m+1$ et notre hypothèse donnent $P(m+1) = u_{m+1}$. Ainsi, par récurrence, a) est validé■

2 Un théorème de Polya

2.1 Notations, informations

Pour $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, on note :
D_R le disque ouvert de $\mathbb{C}$, centré en 0 et de rayon R (si $R = +\infty$, $D_R = \mathbb{C}$),
D'_R le disque fermé de $\mathbb{C}$, centré en 0 et de rayon R (si $R = +\infty$, $D_R = \mathbb{C}$),
C_R le cercle, centré en 0 et de rayon R (si $R = +\infty$, $C_R = \emptyset$) et
E_R le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions définies de D_R dans $\mathbb{C}$ qui sont sommes de séries entières de rayon de convergence au moins égal à R($E_{+\infty} = E_\infty$, pour simplifier, est l'espace des fonctions entières.)
On pourra utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ lorsque $n \to +\infty$.
La première sous-section a pour but d'établir quelques propriétés des séries entières utilisées dans la partie suivante. Dans celle-ci on montre que toute fonction entière soumise à certaines conditions est un polynôme. Le résultat obtenu est dû au mathématicien hongrois Georg Polya (1915); à cet effet on aura besoin de la question 12).

2.2 Séries entières

Dans toute cette partie on fixe $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, f dans E_R, ω dans D_R et $r \in]|\omega|, R[$.

Pour $z \in D_R$, on écrit donc : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, où le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ vaut au moins R.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(k)}$ la fonction définie pour $z \in D_R$ par :

$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n z^{n-k}$. (On sait que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq k} n(n-1)...(n-k+1)a_n z^{n-k}$ est égal à celui de la série entière initiale).

13) Vérifier que, si m est un entier relatif, alors $\int_0^{2\pi} e^{imt}dt = \delta_{0,m} 2\pi$, où δ désigne le symbole de Kronecker.

14) Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose $u_n(t) = a_n r^n e^{i(n-p)t}$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 2\pi] = I$.

a) Prouver que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur I.

b) En déduire soigneusement que $\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt = 2\pi a_p r^p$.

15) Montrer que $f(\omega) = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - \omega} f(re^{it}) \frac{dt}{2\pi}$.

(On pourra partir de $\frac{re^{it}}{re^{it} - \omega} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{\omega}{re^{it}}\right)^p$.)

16) Justifier l'existence de $\sup_{z \in C_r} (\{|f(z)\})$.

On note $M_f(r)$ cette borne supérieure et on pourra admettre qu'il s'agit d'un maximum.

17) Etablir l'inégalité : $|f(\omega)| \leq \frac{r}{r - |\omega|} M_f(r)$.

18) En déduire $|f(\omega)| \leq M_f(r)$.

(On pourra appliquer, avec justification, le résultat précédent à f^p puis faire tendre p vers $+\infty$.)

19) Vérifier la convergence de la série de terme général $a_n \omega^{n-1-j}$ pour $n \geq j+1$.

On pose $b_j = \sum_{n=j+1}^{+\infty} a_n \omega^{n-1-j}$.

20) Prouver que, lorsque $j \to +\infty$, $b_j = O\left(\frac{1}{r^j}\right)$.

21) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{j \geq 0} b_j z^j$ est au moins égal à R.

On note g la somme de cette série entière.

22) Etablir que, pour $z \in D_R$, $(z - \omega)g(z) = f(z) - f(\omega)$.

On suppose dans les quatre questions qui suivent que f s'annule en $p \geq 1$ points non nuls et distincts $z_1, ..., z_p$ tous situés dans D'_r.

23) Montrer qu'il existe F dans E_R telle que :

$\forall z \in D_R, F(z) \times \prod_{j=1}^{p} (z - z_j) = f(z) \times \prod_{j=1}^{p} (r^2 - \overline{z_j} z)$.

24) Si $j \in \{1, ..., p\}$ et $z \in C_r \setminus \{z_j\}$ que vaut $\left|\frac{r^2 - \overline{z_j} z}{z - z_j}\right|$?

25) En appliquant 18) à F au point $\omega = 0$, prouver :

$M_f(r) \times \left|\prod_{j=1}^{p} z_j\right| \geq |f(0)|\, r^p$.

26) On suppose $f(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Vérifier :

$M_f(r) \times \left|\prod_{j=1}^{p} z_j\right| \geq \frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!} r^{p+k}$.

On suppose dans cette fin de partie que :

$R = +\infty$, f est nulle sur $\mathbb{N}$ et qu'il existe $c \in]0, e[$ tel que,lorsque $r \to \infty$, $M_f(r) = O(c^r)$.

27) Démontrer que $f = 0$.

(On raisonnera par l'absurde en utilisant la question précédente avec k égal au plus petit des entiers naturels i pour lesquels $f^{(i)}(0) \neq 0$, $r = p$,$z_1 = 1, ..., z_p = p$ et en faisant tendre p vers $+\infty$.)

Solution :

13) Si $m=0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{imt}dt = 2\pi$; sinon, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{imt}dt = \left[\frac{e^{imt}}{im}\right]_0^{2\pi} = 0$ (par périodicité)$\Box$

14)a) Pour tout entier n et tout $t \in I$: $|u_n(t)| = |a_n|r^n$. Comme $r < R$, la série $\sum_{n\geq 0} |a_n|r^n$ converge bien (on notera M sa somme en vue de questions prochaines) et la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ sur I est prouvée$\Box$

b) La continuité de chaque u_n sur I et la CVN mise en évidence précédemment font que l'on peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment.

En remarquant que $t \in I \to f(re^{it})e^{-ipt})$ est en fait $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, il vient alors :

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}dt = 2\pi a_p r^p;\text{ en vertu de 13)}\Box$$

15) Pour tout entier naturel p et tout $t \in I$, on pose $v_p(t) = f(re^{it})(\dfrac{\omega}{re^{it}})^p$. En utilisant la notation introduite en 14)a) et par inégalité triangulaire, nous avons $\left|f(re^{it})\right| \leq M$ sur I donc $|v_p(t)| \leq M(\dfrac{|\omega|}{r})^p$, ce pour tout entier naturel p et tout $t \in I$; le terme majorant est celui d'une série géométrique convergente ($r > |\omega|$) et ainsi la série de fonctions continues (sur I) $\sum_{p\geq 0}$ converge-t-elle normalement sur I. On lui applique à nouveau le théorème d'intégration terme à terme sur un segment et à l'aide de 14)b) il vient (la somme de cette série étant $t \in I \to \dfrac{re^{it}}{re^{it}-\omega} f(re^{it}))$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}-\omega} f(re^{it})dt = \sum_{p=0}^{\infty} (\frac{\omega}{r})^p \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt = 2\pi \sum_{p=0}^{\infty} a_p\omega^p = 2\pi f(\omega)\Box$$

16) Il suffit de justifier que $|f|$ est majorée sur le cercle C_r, ce qui a été expliqué en 15)$\Box$

17) On utilise l'égalité obtenue en 15),l'inégalité triangulaire pour les intégrales et la définition de $M_f(r)$, ce qui donne :

$$|f(\omega)| \leq \int_0^{2\pi} \frac{r}{|re^{it}-\omega|} M_f(r)dt.$$

Puis par inégalité triangulaire inverse $|re^{it}-\omega| \geq r - |\omega| > 0$ donc $|f(\omega)| \leq \dfrac{r}{r-|\omega|} M_f(r)\Box$

18) Par produit de Cauchy (itéré) le rayon de convergence de la série entière associée à f^p est au moins égal à R donc $f^p \in E_R$. On peut donc appliquer l'inégalité de 17) à f^p (en observant que $M_{f^p}(r) = (M_f(r))^p$, tout ceci pour tout entier naturel p. On obtient donc :

$|f(\omega)|^p \leq \dfrac{r}{r-|\omega|}(M_f(r))^p$ puis, par croissance de $u \geq 0 \to u^{1/p}$,

$|f(\omega)| \leq (\dfrac{r}{r-|\omega|})^{1/p} M_f(r)$ et, par conservation des inégalités à la limite si $p \to +\infty$, il vient enfin $|f(\omega)| \leq M_f(r)\Box$

19) ω appartenant au disque ouvert de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, cette série converge absolument$\Box$

20) Posons pour tout entier naturel j : $t_j = \displaystyle\sum_{n=j+1}^{+\infty} |a_n|r^n$.

La suite (t_j) est bornée (elle tend même vers 0 en tant que reste d'une suite convergente) et $|b_j| \leq \displaystyle\sum_{n=j+1}^{+\infty} |a_n||\omega|^{n-j-1} \leq r^j t_j$; ce qui donne bien (avec le début de cette réponse) $b_j = O\left(\dfrac{1}{r^j}\right)$ (notez au passage que le O est en fait un o mais peu importe...)$\Box$

21) La question précédente montre que la suite $(b_j r^j)$ est bornée pour tout $r < R$ ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum_{j\geq 0} b_j z^j$ est supérieur à r pour tout $r < R$ donc qu'il vaut au moins $R\Box$

22) Fixons $z \neq \omega$ (sinon ?) dans D_R et $N \in \mathbb{N}$ et notons G_N la somme partielle d'ordre N de g.

Nous avons, par linéarité des sommes de séries convergentes, le loisir de permuter l'ordre des sommations :

$$G_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\omega^{n-1}(\sum_{j=0}^{\min(n-1,N)} (\frac{z}{\omega})^j).$$

Dans ces conditions (et sommes géométriques à l'appui) , $G_N(z) = \dfrac{1}{z-\omega}(\sum_{n=1}^{N} a_n\omega^n(\dfrac{z}{\omega})^n - 1) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\omega^n((\dfrac{z}{\omega})^{N+1} - 1) = \dfrac{1}{z-\omega}(-f(\omega) + f_N(z)) + \dfrac{1}{z-\omega} z^{N+1} b_N$, où f_N désigne la somme partielle d'ordre N de f.
Donc en faisant tendre N vers $+\infty$, il vient $g(z) = \dfrac{1}{z-\omega}(-f(\omega) + f(z)) + 0$, ce puisque la série de terme général $z^{N+1}b_N$ converge en vertu de 20)$\square$
23) On raisonne par récurrence sur p.
$p = 0$, avec la convention du produit vide $F = f$.
On suppose établie la formule au rang p en gardant les notations de l'énoncé et en considérant z_{p+1} un zéro supplémentaire, non nul et dans D'_R pour f.
On pose pour $z \in D_R$, $\phi(z) = f(z) \times (r^2 - \overline{z_{p+1}}z)$; $\phi \in E_R$ et $\phi(z_{p+1}) = 0$, on peut lui appliquer 22) avec $\omega = z_{p+1}$; il existe $H \in E_R$ tel que, pour tout $z \in D_R$: $H(z)(z - z_{p+1}) = \phi(z)$ (1).
Ainsi (dans le même contexte) $\times \prod_{j=1}^{p}(r^2 - \overline{z_j}z)H(z)(z - z_{p+1}) = f(z) \times \prod_{j=1}^{p+1}(r^2 - \overline{z_j}z)$.
On utilise alors pour H notre hypothèse de récurrence (licite car dans E_R et via (1) ci-dessus H s'annule en z_1,...,z_p) et on peut dire qu'il existe une fonction $K \in E_R$ telle que $\times \prod_{j=1}^{p}(r^2 - \overline{z_j}z)H(z) = K(z) \times \prod_{j=1}^{p}(z - z_j)$ soit enfin $K(z) \times \prod_{j=1}^{p+1}(z - z_j) = f(z) \times \prod_{j=1}^{p+1}(r^2 - \overline{z_j}z)$, tout ceci pour tout $z \in D_R$. La récurrence se poursuit bien$\square$
24) En remarquant que $r^2 = \overline{z}z$, on a $\boxed{\left|\dfrac{r^2 - \overline{z_j}z}{z - z_j}\right| = r}$$\square$
25) On souscrit à l'invite de l'énoncé.
i) Pour tout $z \in C_r$, $|F(z)| \prod_{j=1}^{p} |z - z_j| = |f(z)| r^p \prod_{j=1}^{p} |z - z_j|$. Donc si de plus $z \neq z_j$ (pour tout j), on a après simplification $|F(z)| = |f(z)|r^p \leq M(f,r)r^p$, ce pour tout $z \in C_r \setminus \{z_1, ..., z_p\}$.
Comme $\psi : \theta \in [0, 2\pi] \to F(re^{i\theta})$ (est continue via le théorème C^0 pour les séries de fonctions), l'inégalité précédente prouve que $|\psi(\theta)| \leq M(f,r)r^p$ sauf pour un nombre fini de valeurs.
Mais en ces valeurs ψ est limite (continuité oblige) d'une suite de nombres contraints par l'inégalité précédente et montre que cette inégalité est toujours vraie. Autrement dit $\boxed{M(F,r) \leq M(f,r)r^p}$.
ii) On applique alors 18) à F pour $\omega = 0$ et on obtient $|F(0)| \left|\prod_{j=1}^{p} z_j\right| = |f(0)|r^{2p} \leq M(f,r)r^p \left|\prod_{j=1}^{p} z_j\right|$ d'où l'inégalité en vue$\square$
26) On a donc (Taylor via le champ réel) : $a_0 = ... = a_{k-1} = 0$ et $f(z) = g(z)z^k$ où $g \in E_R$, $g(0) = a_k = \dfrac{f^k(0)}{k!}$.
Il suffit alors d'appliquer le résultat précédent à g et de multiplier les deux membres de cette inégalité par $r^k$$\square$
27) Au moins un des a_i étant non nul, la définition de k a bien du sens.
En utilisant le protocole suggéré ($f(p) = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$) et la question précédente dans le contexte proposé :
$M_p(f)p! \geq \dfrac{|f^k(0)|}{k!}p^{p+k}$ donc $w_p = M_p(f)\dfrac{p!}{p^{p+k}}\dfrac{|f^k(0)|}{k!}$. Or (pour $p \to +\infty$ et avec Stirling) : $w_p = p^{1/2-k}O((c/e)^p)$ et ainsi $w_p \to 0$ si $p \to +\infty$. De ceci on obtient $f^k(0) = 0$, ce qui est la contradiction voulue$\blacksquare$

2.3 Preuve du théorème de Polya

Soient f dans E_∞, $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $r > n$.
28) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :
$F_n = \dfrac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}$.
29) A l'aide de la question 15), vérifier que :

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{n!f(re^{it})}{(re^{it}-1)\dots(re^{it}-n)}\frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k).$

30) Montrer alors que $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k)\right| \leq \frac{n!M_f(r)}{(r-1)\dots(r-n)}.$

On suppose désormais que :

a) $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$,

b) lorsque $r \to +\infty$, $M_f(r) = o\left(\dfrac{2^r}{\sqrt{r}}\right)$.

Nous allons prouver que f est polynomiale (Polya).

N.B. L'exemple de $f(z) = 2^z$ montre que la condition asymptotique b) n'est pas loin d'être optimale.

31) En appliquant la question précédente à $r = 2n+1$, prouver qu'il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que :

$\displaystyle\forall n \geq N, \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k) = 0.$

32) Conclure avec les questions 12) et 27).

Solution :

28) On pose $B_k = \dfrac{H_{n+1}}{X-k}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. La décomposition désirée s'obtient en déterminant les composantes $a_0, .., a_n$ de $n!$ dans $(B_0, ..., B_n)$, base de E_n. Par spécialisation en tout $k \in [\![0,n]\!]$, il vient $a_k = (-1)^{n-k}\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = (-1)^{n-k}\dbinom{n}{k}$ et ainsi $\boxed{\displaystyle F(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{X-k}}$ □

29) Avec 15) il vient pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ $\displaystyle f(k) = \int_0^{2\pi}\frac{re^{it}}{re^{it}-k}f(re^{it})\frac{dt}{2\pi}$, ce puisque $r > n$ donc, par linéarité intégrale : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k) = \int_0^{2\pi} re^{it}\Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{re^{it}-k}\Big)f(re^{it})\frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} re^{it}F_n(re^{it})f(re^{it})\frac{dt}{2\pi}$ avec la question précédente. D'où le résultat en remplaçant F_n par sa forme initiale□

30) On part de 29) en prenant le module de chaque membre et par inégalité triangulaire directe et inverse on a immédiatement le résultat□

31) Pour tout entier n et en prenant $r = 2n+1 > n$ dans l'inégalité précédente, il vient : $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k)\right| \leq M_f(2n+1)\frac{(n!)^2}{(2n)!} = p_n.$

Avec Stirling et l'hypothèse sur $M(f,r)$ on a vite et bien que $p_n = o(1)$.

La suite d'entiers $\displaystyle\Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k)\Big)_n$ converge donc vers 0 donc stationne sur 0 d'où la réponse□

32) La question précédente et la question 12) montrent que f coïncide avec $P \in E_N$ sur $\mathbb{N}$.

Par ailleurs $f - P$ est alors nulle sur $\mathbb{N}$ et répond à la contrainte asymptotique formulée en 27) donc $f = P$■

FIN DU SUJET