Lycée Bellevue. Toulouse **PC***
2024-2025 **11 janvier 2025**

Corrigé du TD 21 et cours : Isométries vectorielles. Matrices orthogonales

---

Dans tout ce qui suit $\boxed{(E,<,>) \text{ est un espace euclidien de dimension } n \geq 1}$. La norme associée au produit scalaire précédent se notera $\boxed{\|.\|}$.
Les structures euclidiennes considérées pour des sev de F appropriés sont induites (via restriction) par celle de E.
Si, p et g désignant des entiers naturels non nuls, $A = (a_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ alors $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}})$ et cette conjugaison matricielle possède vis à vis des opérations matricielles des propriétés analogues à la conjugaison usuelle.

Exercice 1 : (Eléments propres)
1) Soit $f \in O(E)$. Vérifier que deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.
2) Soient $A \in O(n)$ et $\lambda \in Sp(A)$ à laquelle on associe une colonne propre X.
Etablir successivement que :
o) $N(X) \overset{def}{=} {}^tX\overline{X} \in \mathbb{R}_+^*$;
i) $A\overline{X} = \overline{\lambda}.\overline{X}$;
ii) ${}^tXA\overline{X} = \overline{\lambda}N(X)$.
iii) ${}^t\overline{X}{}^tAX = \overline{\lambda}N(X)$;
iv) $\dfrac{1}{\lambda}N(X) = \overline{\lambda}N(X)$.
En déduire que $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 2 : (Stabilité)
Soient $f \in O(E)$ et F un sev de E, stable par f et non réduit au vecteur nul.
On note g l'endomorphisme de F induit par f.
1) Etablir que $g \in O(F)$.
2) Vérifier que $F^{\perp}$ est stable par f.
Solution :
1) Si une propriété est vraie pour tout $x \in E$, elle l'est d'autant plus pour $x \in F \subset E$.
$\boxed{\text{On notera en particulier que } g \in GL(F)}$.
2) $\boxed{\text{A connaître et à savoir démontrer}}$:
Soient $y \in F^{\perp}$ et $x \in F$ alors $< f(y), x >=< f(y), g(g^{-1}(x)) >=< f(y), f(z) >$, où $z = g^{-1}(x) \in F$ (cf 1)).
Finalement $< f(y), x >=< f(y), f(z) >=< y, z >= 0$ puisque $(y, z) \in F^{\perp} \times F$ d'où la stabilité voulue■

Exercice 3 : (Inégalités et matrices orthogonales)
Soit $A = (a_{i,j}) \in O(n)$.
1) Prouver que $|a_{i,j}| \leq 1$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
2) En déduire que $|tr(A)| \leq n$ et préciser les cas d'égalité.
3)a) Etablir que $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |a_{i,j}| \leq n^{3/2}$ et caractériser le cas d'égalité.
b) Etudier ces cas d'égalité pour $n = 2$ et $n = 3$.
Solution :
3) On utilise à cette fin le produit scalaire de Schur sur $M_n(\mathbb{R})$ qui n'est rien d'autre que le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$.
Rappelons ceci. Pour $U = (u_{i,j})$ et $V = (v_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$, $\boxed{< U, V >= tr({}^tUV) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} u_{i,j}v_{i,j}}$ donc $\boxed{\|U\| = \sqrt{tr({}^tUU)} = \sqrt{\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (u_{i,j})^2}}$.
Dans ce cadre euclidien, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $U = (|a_{i,j}|)$ et $V = (1)$; ce qui donne :

$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |a_{i,j}| \leq n\,\|U\|.$

Mais $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (a_{i,j})^2 = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}(a_{i,j})^2) = \sum_{j=1}^{n} 1 = n$ puisque A est orthogonale et qu'ainsi chaque vecteur colonne est unitaire. En revenant à C.S, il vient bien $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |a_{i,j}| \leq n^{3/2}\square$

Le cas d'égalité se caractérise par le fait que la matrice U doit être proportionnelle à V soit il existe un réel $m > 0$ tel que $|a_{i,j}| = m$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le caractère unitaire des colonnes de U impose $m = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

En résumé (et en faisant porter la CNS sur A) il y a égalité dans 3)a) uniquement et éventuellement pour des matrices **orthogonales** de la forme $\frac{1}{\sqrt{n}}(b_{i,j})$ où $b_{i,j} \in \{-1,1\}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Autrement dit le cas d'égalité n'a lieu que pour des matrices $A = \frac{1}{\sqrt{n}}B$, où B est une matrice d'ordre n dont tous les coefficients valent ± 1 et qui vérifient ${}^t(B)B = nI_n$. De telles matrices s'appellent $\boxed{\text{matrices de Hadamard}}\square$

b) En fait une matrice de Hadamard est une matrice carrée dont tous les coefficients valent ± 1 et dont les colonnes sont deux à deux orthogonales.

Pour $n = 2$, on les obtient toutes à partir de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour $n = 3$, il est assez évident que le produit scalaire de deux colonnes d'une matrice de Hadamard est un nombre impair donc ne peut pas être nul.

Autrement dit le cas d'égalité peut se produire pour $n = 2$ mais pas pour $n = 3\blacksquare$

Exercice 4 : (Caractérisation des isométries vectorielles de E)

Soit f une application de E dans lui-même.

Montrer que $f \in O(E) \Longleftrightarrow f$ conserve le produit scalaire de E.

Solution :

$\Longrightarrow$ vient du cours.

Réciproquement f conservant en particulier les normes, il nous suffit de montrer que $f \in L(E)$.

Soit $(x,y,\lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$ nous allons (grâce au caractère défini du PS) vérifier que :

$u \overset{def}{=} < f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y), f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y) >= 0$

Par bilinéarité du produit scalaire :

$u =< f(x+\lambda y), f(x+\lambda y) > + < f(x), f(x) > +\lambda^2 < f(y), f(y) > -2 < f(x+\lambda y), f(x) > -2\lambda < f(x+\lambda y), f(y) > 2\lambda < f(x), f(y) >$ donc, puisque f conserve le produit scalaire, on a

$u =< x+\lambda y, x+\lambda y > + < x, x > +\lambda^2 < y, y > -2 < x+\lambda y, x > -2\lambda < x+\lambda y, y > 2\lambda < x, y >= 0\blacksquare$

Exercice 5 : (Propriétés simples de $O(n)$)

i) $O(n)$ est-il un sev de $M_n(\mathbb{R})$? En est-il une partie convexe?

ii) Prouver que $O(n)$ est un fermé borné de $M_n(\mathbb{R})$.

A et B sont dans la suite des éléments de $O(n)$.

iii) (Mines) Montrer que si $\lambda \in]0,1[$ et $(1-\lambda)A + \lambda I_n \in O(n)$ alors $A = I_n$.

iv) En déduire que $\lambda \in]0,1[$ et $(1-\lambda)A + \lambda B \in O(n)$ alors $A = B$.

Solution :

i) Non et Non puisque $0_n = \frac{1}{2}(I_n - I_n) \notin O(n)$.

ii) Bornée oui avec l'exercice 3. 1) par exemple$\square$

Considérons une suite (A_p) à termes dans $O(n)$ convergeant vers $M \in M_n(\mathbb{R})$. Prouvons que $M \in O(n)$.

Par propriétés des suites de matrices convergentes (convergences de toutes les suites composantes) et pour $p \to \infty$, on a :

${}^tA_p \to {}^tM$ et, par stabilité du produit matriciel vis à vis des limites, ${}^tA_pA_p \to {}^tMM$.

Mais la suite $({}^tA_pA_p)$ est la suite constante de terme général I_n, l'unicité de la limite donne bien $\boxed{{}^tMM = I_n}\square$

iii) Posons $M = (1-\lambda)A + \lambda I_n$ alors ${}^tMM = I_n$ conduit à $((1-\lambda)^2 + \lambda^2)I_n + \lambda(1-\lambda)(A + {}^tA) = I_n$. Ceci impose que les coefficients hors diagonale de A soient nuls et que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda(1-\lambda)(1-a_{i,i}) = 0$.

Ainsi $\boxed{A = I_n}\square$

iv) $O(n)$ est un groupe pour la multiplication matricielle donc $B^{-1}((1-\lambda)A + \lambda B) = (1-\lambda)B^{-1}A + \lambda I_n \in O(n)$. En vertu de iii) $B^{-1}A = I_n$ soit $A = B\blacksquare$