Corrigé du TD 22 : Théorème spectral

Dans tout ce qui suit $\boxed{(E,<,>) \text{ est un espace euclidien de dimension } n \geq 1}$. La norme associée au produit scalaire précédent se notera $\boxed{\|.\|}$.

Exercice 1 : (Endomorphismes auto-adjoints)
Montrer qu'un projecteur (resp. une symétrie) de E est auto-adjoint si et seulement si il (resp. elle) est orthogonal (resp. orthogonale).
Solution :
Dans votre cours il est montré que ces conditions sont suffisantes.
Supposons s symétrie suivant F et de direction G auto adjoint. Montrons que $F^{\perp} = G$; puisque G est un supplémentaire de F (comme l'orthogonal de F) une inclusion suffira puisque ces deux sev ont même dimension.
Prenons donc $x \in F$ et $y \in G$ alors $s(x) = x$ et $s(y) = -y$ car $F = Ker(s_id_E)$ et $G = Ker(s_id_E)$. Comme $< s(x), y >=< x, s(y) >$, il vient $< x, y >= - < x, y >$ soit $< x, y >= 0$ et, comme attendu, $G \subset F^{\perp}$.
Même démarche pour les projecteurs■

Exercice 2 : (Décomposition polaire)
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
1) Etablir que : ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$.
2) On suppose ici A inversible, prouver que ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.
3) A l'aide du théorème spectral matriciel (cf cours ou exo suivant) montrer qu'il existe une matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = {}^tMM$.
4) Vérifier alors que MS^{-1} est une matrice orthogonale.
5) En déduire que M peut s'écrire comme le produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique définie positive.
6) Prouver l'unicité d'une telle décomposition pour $n = 2$.

$\boxed{\text{Les trois exercices qui suivent traitent du même thème avec des nuances propres aux concours}}$

Exercice 3 : (D'après CCINP 2021)
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine carrée s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Dans ce cas, on dit que B est une racine carrée de A.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une racine carrée, alors $\det(A) \geq 0$.
2. Etudier la réciproque de la propriété établie dans la question précédente dans le cas où $n = 2$. On pourra considérer la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$
et écrire $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
3. Montrer qu'une matrice peut posséder une infinité de racines carrées.

Dans tout le reste de l'exercice, on considère une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives.

4. Justifier que la matrice S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de l'exercice, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de S comptées avec leur multiplicité. On fixe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On considère également la matrice $R = P\Delta P^{-1}$ avec :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

5. Vérifier que R est une matrice symétrique et une racine carrée de S.

6. Déterminer explicitement une racine carrée symétrique de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en orthodiagonalisant cette matrice.

7. On revient au contexte général en considérant B une racine carrée de A symétrique et de spectre inclus dans $\mathbb{R}_+$.
   Prouver que, pour $\lambda \in Spec(A)$, $Ker(B - \sqrt{\lambda} I_n) = Ker(A - \lambda I_n)$. En déduire que $B = R$.
   NB : Les questions 3,6,7 ne figuraient pas sur le sujet initial.

Exercice 4 : (Racine carrée d'un élément de $S_n^+(\mathbb{R})$ d'après Centrale 2024)
Dans toute cette partie, étant donnée une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle racine carrée de M toute matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

1. Rappeler sans démonstration la description des matrices de $O(2)$.
   On décrira leurs coefficients en fonction d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer les racines carrées de I_2 appartenant à $O(2)$ appartenant à $O(2)$. Que peut-on conclure quant au nombre de racines carrées de I_2?

3. Rappeler sans démonstration la condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre d'une matrice symétrique pour qu'elle soit positive.

4. Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

5. Montrer que B est la seule racine carrée de M appartenant à $S_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 5 : (Mines 2021)
Soient $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$.
1) Montrer l'existence d'une matrice symétrique réelle C telle que $A = C^2$.
2) Etablir que les valeurs propres de AB sont toutes réelles.
Solution :
1) Traité dans les deux exercices précédents (Q5 de l'exercice 3)).
2) On traite d'abord le cas : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Ainsi C est aussi inversible et $AB \sim C^{-1}ABC = CBC$.
Comme CBC est symétrique (la transposer au besoin) réelle, toutes ses valeurs propres sont bien réelles. Le spectre étant un invariant de similitude, il en va de même pour AB.
Supposons maintenant que $0 \in Sp(A)$ et que $dim(Ker(A)) = p$.
On peut écrire $A = \Omega H^t\Omega$, où $H = diag(D, 0_p$ et D matrice diagonale à coefficients strictement positifs et d'ordre $n - p$
Ainsi $AB \sim H^t\Omega B\Omega$. On pose alors $M = {}^t\Omega B\Omega$ qui est symétrique réelle et on note N la sous matrice carrée symétrique, définie positive, d'ordre n_p de M (faite des coefficients de M d'ordre $n - p$).
$HM = diag(N, 0_p)$ et $\chi_{HM} = X^p\chi_N$ et par le premier cas χ_N ne possédant que des racines réelles, on a ce qu'il faut■
1) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

CNS pour que A soit positive, définie positive ?
2) Soit $(a, b, c) \in [-1, 1]^3$ tel que $1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$.
Prouver que $1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Solution :
1) on a d'abord $a \in [-1, 1]$ puis $a \in]-1, 1[$.
2) A chercher$\blacksquare$