

# Chapitre 14 : Logique et raisonnement

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Logique</b>	<b>1</b>
1.1	Connecteurs élémentaires . . . . .	1
1.2	Quantificateurs . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Modes de raisonnement</b>	<b>5</b>
2.1	Disjonction de cas . . . . .	5
2.2	Démonstration par l'absurde . . . . .	5
2.3	Démontrer une implication . . . . .	5
2.3.1	Méthode directe . . . . .	5
2.3.2	Par contraposition . . . . .	6
2.4	Démontrer une équivalence . . . . .	6
2.4.1	Par raisonnement direct . . . . .	6
2.4.2	Par double implication . . . . .	6
2.5	Utiliser un contre-exemple . . . . .	6
2.6	Raisonnement par analyse-synthèse . . . . .	7

## 1 Logique

### 1.1 Connecteurs élémentaires

#### Définition 1 (Assertion).

Une *assertion* est un énoncé mathématique qui peut prendre deux valeurs : **vrai** ( $V$ ) ou **faux** ( $F$ ).

#### ■ Exemple 1:

Les phrases suivantes sont des assertions :

- « 2 est un entier impair » (**F**)
- «  $(100 + 1)^2 = 10000 + 200 + 1$  » (**V**)

La suivante n'est pas une assertion :

- «  $a + = 2$  »

**Définition 2 (Négation d'une assertion).**

Étant donnée une proposition  $P$ , on appelle « *négation de  $P$*  » et on note *non  $P$*  ou  $\neg P$  la proposition définie par :

- $\neg P$  est vraie lorsque  $P$  est fausse ;
- $\neg P$  est fausse lorsque  $P$  est vraie.

**► Exercice 1**

Écrire la négation des assertions suivantes :

1. « 2 est un entier impair »
2.  $n \in \mathbb{N}$
3.  $x \geq 1$
4.  $y > x$

**Définition 3 (Conjonction).**

Étant données deux propositions  $P$  et  $Q$ , on définit la proposition « *conjonction de  $P$  et  $Q$*  » notée  *$P$  et  $Q$*  ou  $P \wedge Q$  telle que :

- $P \wedge Q$  est vraie lorsque  $P$  et  $Q$  sont vraies ;
- $P \wedge Q$  est fausse lorsque l'une au moins des deux propositions  $P$  ou  $Q$  sont fausses.

**► Exercice 2**

Écrire sous forme de conjonction l'assertion  $-1 < x \leq 1$ .

**Définition 4 (Disjonction).**

Étant données deux propositions  $P$  et  $Q$ , on définit la proposition « *disjonction de  $P$  et  $Q$*  » notée  *$P$  ou  $Q$*  ou  $P \vee Q$  telle que :

- $P \vee Q$  est vraie lorsque l'une des propositions  $P$  ou  $Q$  sont vraies ;
- $P \vee Q$  est fausse lorsque  $P$  et  $Q$  sont fausses.

**► Exercice 3**

Écrire sous la forme d'une disjonction l'assertion  $x \in ]-\infty; -2] \cup ]1; +\infty[$ .

**Définition 5 (Implication).**

Étant données deux propositions  $P$  et  $Q$ , on définit la proposition « *implication de  $Q$  et  $P$*  » notée  $P \implies Q$  définie par  $(\neg P \vee Q)$ , ainsi :

- $P \implies Q$  est vraie lorsque  $P$  est fausse ou  $Q$  est vraie ;
- $P \implies Q$  est fausse lorsque  $P$  est vraie et  $Q$  est fausse.

**Remarque 1** (Lecture de l'implication).

La proposition  $P \implies Q$  se lit «  $P$  implique  $Q$  » ou « Si  $P$  alors  $Q$  ».  
Lorsque  $P \implies Q$  est vraie, on dit que  $P$  est une **condition suffisante** pour avoir  $Q$  et que  $Q$  est une **condition nécessaire** pour avoir  $P$ .

**► Exercice 4**

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1.  $(2 = 3) \implies (1 + 1 = 2)$
2.  $(2 = 3) \implies (1 = 5)$
3.  $(1 + 1 = 2) \implies 2 = 3$
4.  $(4 = 5) \implies$  Je suis le Pape

**► Exercice 5**

Donner la négation des assertions suivantes :

1. S'il pleut, alors je prends mon parapluie.
2.  $-2 \leq x < 1$

**Définition 6** (Réciproque).

Étant données deux propositions  $P$  et  $Q$ , on appelle *réciproque* de l'implication  $P \implies Q$  la proposition  $Q \implies P$ .

**Définition 7** (Contraposée).

Étant données deux propositions  $P$  et  $Q$ , on appelle *contraposée* de l'implication  $P \implies Q$  la proposition  $\neg Q \implies \neg P$ .

**Définition 8** (Équivalence).

Étant données deux propositions  $P$  et  $Q$ , on appelle *équivalence entre  $P$  et  $Q$*  et on note  $(P \iff Q)$  la proposition définie par  $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$ .

**■ Exemple 2:**

- $x^2 - 1 = 0 \iff (x = 1 \text{ ou } x = -1)$
- $(x - 1)^2 + y^2 = 0 \iff (x = 1 \text{ et } y = 0)$

**Remarque 2** (Lecture de l'équivalence).

La proposition  $P \iff Q$  se lit «  $P$  équivaut à  $Q$  » ou «  $P$  si et seulement si  $Q$  ».  
Lorsque  $P \iff Q$  est vraie, on dit que  $P$  est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir  $Q$ .

On peut représenter ces définitions sous la forme d'une « table de vérité » :

$P$	$Q$	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$	$P \iff Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

### Remarque 3.

Les opérateurs  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  sont des opérateurs sur les propositions qui permettent d'en générer de nouvelles. Attention au sens précis qu'ont ces opérateurs et éviter les confusions avec les mots français « ET », « OU ».

On peut les mettre en parallèle avec les opérateurs  $\bar{A}$ ,  $\cap$  et  $\cup$  qui agissent sur les ensembles.

## ► Exercice 6

1. En utilisant une table de vérité, démontrer que :

- (a) l'implication  $(P \implies Q)$  est équivalente à sa contraposée  $(\neg Q \implies \neg P)$ .
- (b)  $\neg(P \wedge Q)$  équivaut à  $\neg P \vee \neg Q$
- (c)  $\neg(P \vee Q)$  équivaut à  $\neg P \wedge \neg Q$

2. Étant données les propositions  $P$ ,  $Q$  et  $R$ , construire les tables de vérité des propositions suivantes :

- (a)  $P \vee \neg P$
- (b)  $P \wedge \neg P$
- (c)  $\neg Q \vee P$
- (d)  $[(P \implies Q) \wedge (Q \implies R)] \implies (P \implies R)$ .

## 1.2 Quantificateurs

Soit une propriété dépendant d'un paramètre  $x$ , où  $x$  est un élément d'un ensemble  $E$ .

### Définition 9 (quantificateur universel).

On écrit

$$\forall x \in E, P(x)$$

pour signifier que la propriété  $P(x)$  est vraie pour tous les éléments  $x$  de  $E$ .

Le symbole  $\forall$  est appelé **quantificateur universel** et se lit « Pour tout » ou « quel que soit ».

**Définition 10** (quantificateur universel).

On écrit

$$\exists x \in E, P(x)$$

pour signifier que la propriété  $P(x)$  est vraie pour au moins un élément  $x$  de  $E$ .  
Le symbole  $\exists$  est appelé **quantificateur existentiel** et se lit « il existe ».

**► Exercice 7**

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. «  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 0$  »
2. «  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \geq 0$  »
3. «  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \geq 0$  »
4. «  $\forall x < 2, x^2 < 4$  »
5. «  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \iff x = 2$  »

**Propriété 1** (Négation des propositions avec quantificateurs).

- La négation de la proposition  $\forall x \in E, P(x)$  est :

$$\exists x \in E, \neg P(x)$$

- La négation de la proposition  $\exists x \in E, P(x)$  est :

$$\forall x \in E, \neg P(x)$$

**► Exercice 8**

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels et  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. La suite  $(u_n)$  est majorée par 4.
2. La suite  $(u_n)$  est majorée.
3. La suite  $(u_n)$  n'est pas majorée.
4. La suite  $(u_n)$  est bornée.
5. La suite  $(u_n)$  est croissante.
6. La suite  $(u_n)$  est constante.
7. La fonction  $f$  est la fonction nulle.
8. La fonction  $f$  s'annule.
9. La fonction  $f$  est croissante.
10. La fonction  $f$  admet un maximum.

**2 Modes de raisonnement****2.1 Disjonction de cas****► Exercice 9**

1. Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$  est pair
2. Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq x^2 - x + 1$

**2.2 Démonstration par l'absurde**

**► Exercice 10**

Démontrer qu'il n'y a pas de nombre entier plus grand que tous les autres.

**► Exercice 11**

Soit  $n_1, \dots, n_9$  des entiers naturels tels que  $n_1 + \dots + n_9 = 90$ .

Démontrer qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure à 30.

**► Exercice 12**

Démontrer qu'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  définie par  $f(0) = 1$  et telle que  $f' = f$  ne s'annule pas.

On pourra utiliser la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(x) \times f(-x)$

**2.3 Démontrer une implication****2.3.1 Méthode directe****► Exercice 13**

Démontrer que si  $x \in \mathbb{Q}$  alors  $1 + x \in \mathbb{Q}$

**2.3.2 Par contraposition****► Exercice 14**

Démontrer que  $\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon \implies a = 0$ .

**2.4 Démontrer une équivalence****2.4.1 Par raisonnement direct**

On dit qu'on raisonne par « équivalences successives ».

**■ Exemple 3:**

Lorsqu'on résout une équation (ou une inéquation), on procède par équivalences successives.

$$(x - 1)(3x + 4) = 2x^2 - 2 \quad (1)$$

$$\iff (x - 1)(3x + 4) - 2(x - 1)(x + 1) = 0 \quad (2)$$

$$\iff (x - 1)(3x + 4 - 2(x + 1)) = 0 \quad (3)$$

$$\iff (x - 1)(x + 2) = 0 \quad (4)$$

$$\iff x = 1 \text{ ou } x = -2 \quad (5)$$

**2.4.2 Par double implication**

On effectuera deux raisonnements par implication, « sens direct » et « sens réciproque »

**■ Exemple 4:**

Pour prouver qu'une droite dans le plan repéré admet une équation de la forme  $ax + by = c$ , on montre que

- Si  $d$  est une droite, alors  $d$  admet une équation de la forme  $ax + by = c$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois réels tels que  $(a, b) \neq (0, 0)$ .
- Si  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$  et  $C(x_3; y_3)$  ont leurs coordonnées qui vérifient une même équation de la forme  $ax + by = c$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois réels tels que  $(a, b) \neq (0, 0)$ , alors les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.

**► Exercice 15**

Démontrer que pour tout  $n$  est un entier relatif,  $(n \text{ est pair}) \iff (n^2 \text{ est pair})$ .

Pour le sens réciproque, on pourra procéder par contraposition

**► Exercice 16**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2x = \sqrt{x^2 + 1}$

**2.5 Utiliser un contre-exemple**

Un contre-exemple est une méthode qui permet de prouver qu'une propriété qui s'écrit avec un quantificateur universel est fausse. Pour prouver que «  $\forall x \in E, P(x)$  » est fausse, vous prouvez que «  $\exists x \in E, \neg P(x)$  » est vraie.

**► Exercice 17**

Démontrer que la fonction  $f: x \mapsto \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  n'est pas paire.

**2.6 Reasonner par analyse-synthèse**

Ce raisonnement permet de résoudre un problème ou une équation dont on ne voit pas de solution directe. Il se déroule donc en 2 étapes :

- Phase d'**analyse** : on suppose le problème résolu et on déduit des conditions sur nécessaires
- Phase de **synthèse** : on vérifie sur les conditions sont suffisantes et on conclut sur le problème.

**► Exercice 18**

Démontrer que toute fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

**► Exercice 19**

Résoudre l'équation

$$\ln(3x + 1) + \ln(x + 1) = 0$$

**► Exercice 20**

Trouver toutes les fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$