TD23 (X) : Corrigé

PARTIE I:

1- a) Les λ_i et μ_i ne dépendent pas de i :
Soit $1 \leq j \leq p$, on a:
$-\gamma =< x_{n+1}/x_j >=< \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i/x_j >= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i < x_i/x_j >= \lambda_i - \gamma \sum_{i=1, i\neq j}^{p} \lambda_i = \lambda_j(1+\gamma) - \gamma \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$. Donc $(1+\gamma)\lambda_j = -\gamma + \gamma \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ soit: $\lambda_j = \dfrac{\gamma}{1+\gamma}(-1 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i) = \lambda$ expression indépendante de j.
Même raisonnement pour prouver que $\mu_i = \mu$ est indépendant de i.

b) On calcule successivement: $< x_{n+1}/x_{n+1} >$ et $< x_{n+1}/x_{n+2} >$.
On a : $1 =< x_{n+1}/x_{n+1} >=< \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i/x_{n+1} >= \lambda \sum_{i=1}^{p} < x_i/x_{n+1} >= -\lambda.p.\gamma$
$-\gamma =< x_{n+1}/x_{n+2} >=< \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i/x_{n+2} >= -\lambda.p.\gamma$. D'où $-\gamma = 1$ ce qui contredit l'hypothèse $\gamma \in]0;1[$.

c) Conclusion:
Dans un espace vectoriel euclidien de dimension n, tout système $\gamma - obtus$ a au plus $(n+1)$ vecteurs.

2- a) Le système $x = (x_1, ..., x_k)$ est lié, donc il existe une famille de scalaires λ_i, $i = 1, ..., k$, non tous nuls tels que: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0$. Alors pour tout $j \in \mathbb{N}_k^*$, on a:
$0 =< \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i/x_j >= \lambda_j(1+\gamma) - \gamma \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. D'où $\lambda_j = \dfrac{\gamma}{1+\gamma} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \lambda$ (expression indépendante de j).
Comme les λ_i ne sont pas tous nuls, on a: $\lambda \not= 0$ et $0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \lambda \sum_{i=1}^{k} x_i$. D'où $\boxed{\sum_{i=1}^{k} x_i = 0}$.
Il fallait lire k et non p.

b) $\gamma = \dfrac{1}{n}$.
Par a) on a: $\sum_{i=1}^{k} x_i = 0$, donc pour tout $j \in \mathbb{N}_k^*$, $0 =< \sum_{i=1}^{k} x_i/x_j >= 1 + \gamma - (n+1)\gamma = 1 - n\gamma$.
D'où $\gamma = \dfrac{1}{n}$.

3- Les x_i engendrent E càd: $Vect(x_i, ..., x_k) = E$.
Posons $F = Vect(x_1, ..., x_k)$, comme $\|x_i\| = 1$, il en résulte que $p = \dim F \geq 1$. Quitte à réindicer, on suppose que $(x_1, ..., x_p)$ est une base de F.
Ecrivons $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$; par **I-1-a)** $\lambda_i = \lambda$ est indépendant de i et pour tout $j \in \mathbb{N}_p^*$,
$-\gamma =< x_{n+1}/x_j >= \lambda(1 - (p-1)\gamma) \quad (1).$
Or $1 =< x_{n+1}/x_{n+1} >= \lambda < \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i/x_{n+1} > = \lambda.p.\gamma$ donc $\lambda = \dfrac{1}{p.\gamma}$, p, $\gamma \not= 0$. On reporte dans (1), avec $\gamma = \dfrac{1}{n}$, on obtient: $p = n$. Donc $F = E$ car $\dim E = n$.

4- Construction d'un système $\dfrac{1}{n} - obtus$:

a) **Illustration pour $n = 2$:**

y_1 : vecteur unitaire de E, $y_2 = -y_1$, alors (y_1, y_2) est $\dfrac{1}{1} - obtus$.

Soit x_3 un vecteur unitaire de E tel que $x_3 \perp y_1$: Ecrivons $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 y_1 + \mu_1 x_3 \\ x_2 = \lambda_2 y_2 + \mu_2 x_3 \end{cases}$ on a alors:

$\begin{cases} 1 =< x_1/x_1 >= \lambda_1^2 + \mu_1^2 \\ -\gamma = -\dfrac{1}{2} =< x_1/x_3 >= \mu_1 \end{cases}$, donc $\begin{cases} \mu_1 = -\dfrac{1}{2} \\ \lambda_1 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

De même $\begin{cases} \mu_2 = -\dfrac{1}{2} \\ \lambda_2 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ et par $< x_1/x_2 >= -\dfrac{1}{2}$ on en déduit que $\lambda_1\lambda_2 > 0$.

Pour $n = 3$ on obtient un tetraèdre régulier.

b) Retour au cas général:

On pose $x_i = \lambda_i y_i + \mu_i x_{n+1}$ pour $i \in \mathbb{N}_n^*$, de la même façon que précédement on obtient:

$\begin{cases} \mu_i = -\dfrac{1}{n} \\ \lambda_i = \pm(1 - \dfrac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}} \end{cases}$ et $\lambda_i\lambda_j > 0$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}_n^*$.

Si l'on prend alors $\mu_i = -\dfrac{1}{n}$ et $\lambda_i = \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}$, on a: $x_i = \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}} y_i - \dfrac{1}{n} x_{n+1}$ et le système $(x_1, ..., x_k)$, $k = n + 1$, est $\dfrac{1}{n} - obtus$ (vérification immédiate).

c) $\dim E = n$.

Soit $y_1^{(1)}$ un vecteur unitaire de E, posons $y_2^{(1)} = -y_1^{(1)}$; alors $(y_1^{(1)}, y_2^{(1)})$ est $\dfrac{1}{n} - obtus$. On construit comme en **a)** un système $(y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, y_3^{(2)})$ $\dfrac{1}{2} - obtus$.

(HR): Supposons construit $(y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, ..., y_n^{(n-1)})$ un système $\dfrac{1}{n-1} - obtus$

et posons $H = Vect(y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, ..., y_n^{(n-1)})$. H est un hyperplan de E , d'après **I-5-a)**, on peut construire un système $(x_1, ..., x_{n+1})$ $\dfrac{1}{n} - obtus$, avec x_{n+1} unitaire et $\perp$ à H et $x_i = \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}} y_i - \dfrac{1}{n} x_{n+1}$ par exemple.

PARTIE II:

1- $G(x) = \begin{pmatrix} 1 & & -\gamma \\ & \ddots & \\ -\gamma & & 1 \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{R})$ pour $x = (x_1, ..., x_k)$ $\gamma - obtus$.

$G(x) = \begin{pmatrix} 1 & & \gamma \\ & \ddots & \\ \gamma & & 1 \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{R})$ pour $x = (x_1, ..., x_k)$ $\gamma - aigu$.

2- Pour a, b réels, $M_{a,b} = aI_k + bJ_k \in M_k(\mathbb{R})$.

Si $b = 0$, alors $M_{a,b} = aI_k$ et $P_{a,0} = (-1)^k(X - a)^k$.

Si $b \neq 0$, alors $M = M_{a,b} - aI_k = bJ_k$ et $P_M(X) = P_{bJ_k}(X)$. Mais $P_M(X) = P_{M_{a,b}}(X + a)$ et $P_{bJ_k}(X) = b^k P_{0,1}(X/b)$. D'où $P_{a,b}(X) = (-1)^k b^k P_{0,1}(\dfrac{1}{b}(X - a)) = (-1)^k(x - a)^{k-1}(X - a - kb)$.

En conclusion: $P_{a,b} = (-1)^k(X - a)^{k-1}(X - a - kb)$ pour tout k.

3- Si $x = (x_1, ..., x_k)$ est $\gamma - aigu$, alors: $G(x) = M_{a,b} \in M_k(\mathbb{R})$ avec $a = 1 - \gamma$, $b = \gamma \neq 0$.

D'où $P_x = P_{a,b} = (-1)^k(X - 1 + \gamma)^{k-1}(X - (1 + (k - 1)\gamma)$. $G(x)$ admet donc deux valeurs propres à savoir: $\lambda_1 = 1 - \gamma$ d'ordre $k - 1$ et $\lambda_2 = 1 + (k - 1)\gamma$ simple.

Si $x = (x_i)_{1 \leq i \leq k}$ est $\gamma - obtus$, alors $G(x) = M_{1+\gamma,-\gamma}$, $b = -\gamma \neq 0$ et $a = 1+\gamma$, son polynôme caractéristique est $P_x(X) = (-1)^k(X - (1 + \gamma))^{k-1}(X - 1 + (k - 1)\gamma)$.

Les valeurs propres de $G(x)$ sont alors: $\lambda_1 = 1 + \gamma$, d'ordre $(k - 1)$, $\lambda_2 = 1 - (k - 1)\gamma$ simple.

4- Soient $f = (f_i)$ une base orthonormale de E , e la base canonique de $\mathbb{R}^k$, $M = M_{e,f}(A_x)$ la matrice de l'application linéaire A_x relativement aux bases e et f et $M' =^t M \in M_{n,k}(\mathbb{R})$.

Considèrons l'application linéaire, notée B_x, de matrice $M' =^t M$ relativement aux bases f et e, alors B_x

vérifie la relation $(*)$: $\forall u, \forall w, < u/B_x(w) >= (A_x(u)/w)$ en effet:
Soit $U = [u]_e$, $W = [w]_f$, alors: $< u, B_x(w) >=^t U(^tMW) =^t (MU)W = (A_x(u)/w)$.

Autre façon: Pour $w \in E$, l'application $R^k \to R, u \mapsto (A_x(u)/w)$ est une forme linéaire et l'isomorphisme entre R^k et son dual montre qu'il existe un unique vecteur $v = B_x(w)$ (qui dépend de w) dans R^k tel que: $\forall u \in R^k$, $(A_x(u)/w) =< u/B_x(w) >$. Par bilinéairité du produit scalaire, l'application $E \to R^k$, $w \mapsto B_x(w)$ est linéaire.

L'unicité résulte du fait que $E^\perp = \{0\}$ pour tout espace euclidien E.

5- $M_e(B_x \circ A_x) = G(x)$:
Preuve: Posons $[a_{ij}] = M_e(B_x \circ A_x) \in M_k(\mathbb{R})$. Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_k^*$, on a:
$a_{ij} = \textit{composante}$ de $B_x \circ A_x(e_j)$ suivant e_i
$= (B_x \circ A_x(e_j)/e_i)$ (e_i) base orthonormale
$=< A_x(e_j)/A_x(e_i) > =< x_j/x_i >$. Donc $a_{ij} =< x_j/x_i >$ $\quad$ *ie* $M_e(B_x \circ A_x) = G(x)$.
Remarque: Par la relation précédente on déduit: $\boxed{^tMM = G(x)}$

6- $rg(x) = rgG(x) = k - m$, m ordre de 0 comme racine de P_x.

$\to$ La matrice $G(x)$ est symétrique réelle, d'après la définition même de $G(x)$, donc semblable à $D = diag(\lambda_1, .., \lambda_k)$ où les λ_i sont les valeurs propres de $G(x)$. On suppose que $|\lambda_1| \geq ... \geq |\lambda_k| \geq 0$, alors $rgG(x) = rgD = k - m$ où m est l'ordre de 0 comme valeur propre.
Autre façon: Par **5-** $G(x) =^t MM$ donc $G(x)$ est une matrice réelle symétrique et positive....

$\to$ On a $M = [x_1, ..., x_k]_f$ où $f = (f_i)$ est une **bon** de E, alors: $^tMM = G(x)$ (voir II-5) et on a: $rgG(x) = rg^tMM = rgM$ $\quad (**)$. Mais $rgM = rg(x)$, d'où $rg(x) = rgM = rgG(x)$.
Il reste à montrer que $rg(^tMM) = rgM$: Soit X un vecteur colonne, on a: $MX = 0 \Rightarrow^t MMX = 0$ et $^tMMX = 0 \Rightarrow^t X^tMMX = 0 \Rightarrow^t (MX)(MX) = 0 \Rightarrow \|MX\|^2 = 0 \Rightarrow MX = 0$. Donc $KerM = Ker^tMM$ et par la formule du rang, $rg(^tMM) = rgM$.

7- Par **5-** $G(x) =^t MM$, et $G(x)$ est alors une matrice réelle symétique et $\underline{\textit{positve}}$. On peut donc vérifier que $sp_R G(x) \subset \mathbb{R}_+$ et par suite $\Delta(x) = \min(SpG(x)) \geq 0$.

8- Equivalence de (i) et (ii) :
a) Supposons (i) est vérifiée, et soit $p = rg(x)$, comme $G(x) = G(y)$ on a:
$p = rg(x) = rgG(x) = rgG(y) = rg(y)$. Donc F_1 est de dimension p.
Supposons, sans restreindre à la généralité, que $(x_1, ..., x_p)$ est une base de E_1, et posons
$A = [< x_i/x_j >]_{i,j \in \mathbb{N}_p^*}$, alors $p = rg(x_1, ..., x_p) = rgA$. Donc A est inversible, mais
$A = [< y_i/y_j >]_{i,j \in \mathbb{N}_p^*}$, donc $rgA = rg(y_1, ..., y_p)$ et par suite $(y_1, ..., y_p)$ est libre, donc base de F_1.
b) Supposons (i) est vérifiée et notons $(e_i)_{i>p}$ une base orthonormale de E_2, $(f_i)_{i>p}$ une base orthonormale de F_2, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que: $f(x_i) = y_i$, $i = 1, ..., p$ et $f(e_i) = f_i$, $i = p + 1, ..., n$. Montrons que $f \in \mathcal{O}(E)$.

Il suffit de vérifier: $$\begin{cases} < f(x_i)/f(x_j) >=< x_i/x_j > \ , \ i, j = 1, ..., p & (1) \\ < f(e_i)/f(e_j) >=< e_i/e_j > \ , \text{ pour } i, j = p + 1, ..., n & (2) \\ < f(x_i)/f(e_j) >=< x_i/e_j >, \text{ pour } i = 1, ..., p \text{ et } j = p + 1, ..., n & (3) \end{cases}$$

On a pour $i, j \in \mathbb{N}_p^*$, $< f(x_i)/f(x_j) >= < y_i/y_j >=< x_i/x_j >$ car $G(x) = G(y)$.
Pour $i, j = p + 1, ..., n$, $< f(e_i)/f(e_j) >=< f_i/f_j >= \delta_{ij}$ car (f_i) est une **bon** de F_2.
$=< e_i/e_j >$ car (e_i) est une **bon** de E_1.

Pour $i \in \mathbb{N}_p^*$ et $j = p + 1, ..., n$, on a: $< f(x_i)/f(e_j) >=< y_i/f_j > = 0$; car $f_j \perp yi$

$=< x_i/e_j >$ car $x_i \perp e_j$.
Conclusion: f est bien un automorphisme orthogonal de E.
c) Considèrons l'application définie par **8-b)**, alors f vérifie: $f(x_i) = y_i$ pour tout $i = 1, ..., k$ en effet: si $i = 1, ..., p$ et $j = p + 1, .., k$, alors : $< y_i/y_j >=< x_i/x_j >=< f(x_i)/f(x_j) >$ car $f \in \mathcal{O}(E)$
$= < y_i/f(x_j) >$.
Donc $< y_i/y_j >=< y_i/f(x_j) >$, soit : $< y_i/y_j - f(x_j) >= 0$, on en déduit que: $y_j - f(x_j) \in F_2^\perp$ pour tout $j = p + 1, ..., k$ $(***)$.

Comme x_j est combinaison linéaire des x_i , $i = 1, ..., p$, et que f est linéaire, il en résulte que $f(x_j)$ est combinaison linéaire des $f(x_i) = y_i$, $i \in \mathbb{N}_p^*$, donc $f(x_j) \in F_2$ et par $(***)$, on déduit que:
$y_j - f(x_j) \in F_2^\perp \cap F_2 = \{0\}$, soit: $f(x_j) = y_j$ et ceci pour tout $j = p+1, ..., k$.
Finalement: la relation est vérifiée pour tout $j \in \mathbb{N}_k^*$.

d) Si (ii) est vérifiée, alors (i) aussi par définition de $f \in \mathcal{O}(E)$, et par c) on a: $(i) \Rightarrow (ii)$.
En conclusion , on a bien l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

9- $(i) \Rightarrow (ii)$ résulte des questions précédentes.
Montrons que $(ii) \Rightarrow (i)$:
Soit $e = (e_i)_{i \in \mathbb{N}_k^*}$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$ muni de sa structure euclidienne usuelle, q la forme quadratique, de matrice $G = (a_{ij}) \in M_k(\mathbb{R})$ ralativement à la base e. Comme q est positive et se réduit dans une base orthonormale $\epsilon = (\varepsilon_i)$ (qui est orthogonale pour q), on peut supposer que:
$\forall i = 1, ..., r,\ q(\varepsilon_i) = \lambda_i > 0$
$\forall i = r+1, ..., k$, $q(\varepsilon_i) = \lambda_i = 0$ les λ_i sont les valeurs propres (de q) de G.
On a: $q(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \alpha_i^2$.
Soit $x = (x_1, ..., x_k)$ un système de vecteurs de E et $A_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, E)$ telle que: $A_x(e_i) = x_i$ pour tout $i = 1, ..., k$.
On veut que $< x_i/x_j >= a_{ij}$ pour tous i, j. (1).
Soit $f = (f_i)$ une base orthonormale de E. Si (1) est vérifiée, par II-4-), on a: $\|A_x(u)\|^2 = q(u)$. Cherchons alors les c_i tel que: $\forall i \in \mathbb{N}_r^*$ $A_x(\varepsilon_i) = c_i f_i$ et $A_x(\varepsilon_i) = 0$ si $i > r$.
Si c_i existe, alors $\|A_x(\varepsilon_i)\|^2 = c_i^2 < f_i/f_i >= c_i^2$ ce qui implique: $c_i = \sqrt{q(\varepsilon_i)}$.
Les $c_i = \sqrt{q(\varepsilon_i)}$ conviennent, car si $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varepsilon_i$, on a:
$(*)$ $\|A_x(u)\|^2 =< A_x(u)/A_x(u) >= \left\| \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \sqrt{q(\varepsilon_i)} f_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 q(\varepsilon_i) = q(u)$. On utilise la relation: $< u/v >= \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$ pour montrer que $< x_i/x_j >= a_{ij}$ pour tout (i, j).
On a: $a_{ij} = \frac{1}{4}(q(e_i + e_j) - q(e_i - e_j))$ par définition de a_{ij}.

$$\begin{aligned}
\text{et } < x_i/x_j > &=< A_x(e_i)/A_x(e_j) >= \frac{1}{4}\left(\|A_x(e_i) - A_x(e_j)\|^2 - \|A_x(e_i) - A_x(e_j)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|A_x(e_i + e_j)\|^2 - \|A_x(e_i - e_j)\|^2\right), \ A_x \text{ est linéaire} \\
&= \frac{1}{4}\left(q(e_i + e_j) - q(e_i - e_j)\right) = a_{ij}.
\end{aligned}$$

10- Soit $G = \begin{pmatrix} 1 & & -\gamma \\ & \ddots & \\ -\gamma & & 1 \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{R})$, $k = n+1$, alors G est symétrique.
Supposons que $\Delta(G) \geq 0$ et $rgG \leq k-1 = n$. Comme les valeurs propres de G sont $1 - n\gamma$ et $1 - \gamma$, la valeur propre $\Delta(G) = 1 - n\gamma \geq 0$ ssi $\gamma \leq \frac{1}{n}$ (ici $n \geq 2$).
Supposons donc $\gamma \in]1; \frac{1}{n}]$, alors G vérifie **II-9)** ssi $\gamma = \frac{1}{n}$ (puisque $rgG \leq k-1 = n < k$).
Donc il existe un système $x = (x_1, ..., x_k)$ de vecteurs de E tel que $G = G(x)$.
D'où $< x_i/x_j >= -\gamma$ si $i \neq j$ et $< x_i/x_i >= 1$ et puis $(x_1, ..., x_k)$ est $\frac{1}{n} - obtus$

Construction: Avec les hypothèses sur G indiquées ci-dessus, considèrons l'application linéaire $\varphi : R^k \to E$ telle que: $\varphi(\varepsilon_i) = \lambda_i f_i$ où $\epsilon = (\varepsilon_i)$ est la base orthonormale de $\mathbb{R}^k$ qui réduit G , $f = (f_i)$ **bon** de E et $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_k = 0$ les valeurs propres de G .
Notons $D = M_{\epsilon,f}(\varphi)$, on a: $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_k)$. Notons P la matrice de passage de la base canonique e à la base ϵ, alors PD est la matrice de φ relativement aux bases e et f.
Si $X_i = [x_i]_e$, on a: $X_i = PDE_i$ où $E_i = [e_i]_e$.

Question: Examiner le cas où $n = 2$.

11- un système $\gamma - aigu$ est libre:
On sait que $rg(x) = rgG(x) = k - m$, où m est l'ordre de la valeur propre 0 (avec $m = 0$ si 0 n'est pas valeur propre de $G(x)$).
x est libre $\Leftrightarrow rg(x) = k \Leftrightarrow m = 0 \Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de $G(x)$.
On sait que les valeurs propres de G(x) sont $1 - \gamma > 0$ et $1 + (k-1)\gamma \geq 1$ qui sont strictement positives.
Donc $rgG(x) = k$ et $(x_1, ..., x_k)$ est libre.
Remarque: Si $x = (x_1, ..., x_k)$ est $\gamma - aigu$ alors nécessairement $k \leq n$.

12- Elle résulte de la question **9-** en effet, la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & & \gamma \\ & \ddots & \\ \gamma & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique et $\Delta(G) \geq 0$ et $rgG \leq n$, donc les hypothèses de **9-** (ii) sont satisfaites et par suite, il existe un système $x = (x_1, ..., x_k)$ vérifiant: $< x_i/x_j >= -\gamma$ pour $i \neq j$ et $< x_i/x_i >= 1$ c-à-d x est $\gamma - aigu$.

PARTIE III:

1- $\dim L^s(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2- On travaille dans une base $e = (e_i)$ orthonormale de E (fixée).
Si $f \in L^s(E)$, on a: $Tr(f) = \sum_{i=1}^{n} < f(e_i)/e_i >$.

$$\bullet \text{ Si } f, g \in L^s(E), \text{ alors } tr(f \circ g) = \sum_{i=1}^{n} < f \circ g(e_i)/e_i >= \sum_{i=1}^{n} < g(e_i)/f(e_i) > \qquad f \in L^s(E)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} < e_i/g \circ f(e_i) > \qquad g \in L^s(E)$$
$$= tr(g \circ f).$$

$\bullet\bullet$ L'application $Trace$ est une forme linéaire, de $\bullet$ et $\bullet\bullet$ on déduit que $[./.]$ est une forme bilinéaire symétrique.

$$\bullet\bullet\bullet \text{ Si } f \in L^s(E), \text{ alors } [f/f] = Tr(f^2) = \sum_{i=1}^{n} < f \circ f(e_i)/e_i >= \sum_{i=1}^{n} < f(e_i)/f(e_i) > \text{ car } f \in L^s(E)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|^2 \geq 0.$$

De plus $[f/f] = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, ..., n \ ; \ f(e_i) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.
En conclusion: $[./.]$ est un produit scalaire sur $L^s(E)$.

3-a) p_i est un endomorphisme de E (définition d'un projecteur), symétrique (facile à vérifier).

b) Calcul de $[p_i/p_j]$: Etant donné (i,j), on a:

$$[p_i/p_j] = \sum_{m=1}^{n} < p_j \circ p_i(e_m)/e_m >= \sum_{m=1}^{n} < p_i(e_m)/p_j(e_m) > \text{ car } p_j \in L^s(E)$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \langle p_i(e_m)/ < e_m/x_j > x_j \rangle = \sum_{m=1}^{n} < e_m/x_j > .\langle p_i(e_m)/x_j \rangle$$
$$= \left(\sum_{m=1}^{n} < e_m/x_j > . < e_m/x_j > \right) . < x_i/x_j >= \sum_{m=1}^{n} \langle < x_j/e_m > .e_m/x_i \rangle . < x_i/x_j >$$
$$=< x_j/x_i > . < x_i/x_j >=< x_i/x_j >^2 = \{ .\gamma^2 \text{ si } i \neq j 1 \text{ si } i = j$$

On conclut que $p = (p_1, ..., p_k)$ est un système $\gamma^2 - aigu$.

c) Comme, par **III-3-b)**, $p = (p_1, ..., p_k)$ est $\gamma^2 - aigu$, il en résulte que, d'après **II-11-)**, p est libre dans $L^s(E)$, donc $k \leq \dim L^s(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

4- Puisque $h \in F = Vect(p_1, ..., p_k)$, il existe $a_1, ..., a_k$ dans $\mathbb{R}$ tels que: $h = \sum_{i=1}^{k} a_i p_i$. Soit $j \in \mathbb{N}_k^*$, on a:

$[h/p_j] = [\sum_{i=1}^{k} a_i p_i/p_j] = \sum_{i=1}^{k} a_i < p_i/p_j >= a_j.(1-\gamma^2) + \gamma^2 \sum_{i=1}^{k} a_i.$

Or $[h/p_j] = [P_F(id_E)/p_j] = [id_E/P_F(p_j)]$ (P_F est un projecteur orthogonal, donc symétrique)
$= [id_E/p_j]$ car $p_j \in F$
$= Tr(p_j) = rg(p_j) = 1.$

D'où $1 = a_j(1-\gamma^2) + \gamma^2 \sum_{i=1}^{k} a_i$, soit: $a_j = \dfrac{1-\gamma^2 \sum_{i=1}^{k} a_i}{1-\gamma^2} = a$ expression indépendante de j.

$a \in \mathbb{R}^*$, car sinon $0 = [id_E/p_j] = 1$ et h s'écrit: $h = a \sum_{i=1}^{k} p_i$.

Par $1 = [h/p_j] = [a \sum_{i=1}^{k} p_i/p_j] = a(1+(k-1)\gamma^2)$, on obtient $a = \dfrac{1}{1+(k-1)\gamma^2}$, $k \geq 1$.

5- a) On a $Tr(h) = Tr(\sum_{i=1}^{k} a_i p_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i.Tr(p_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i$ car $Tr(p_i) = 1$
$= k.a$ car $a_i = a$.

Donc $Tr(h) = \dfrac{k}{1+(k-1)\gamma^2}$ (≥ 0). Or $Tr(h) \leq Tr(id_E)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

D'où $\dfrac{k}{1+(k-1)\gamma^2} \leq n$ ($n = Tr(id_E)$.)

b) $n = \dfrac{k}{1+(k-1)\gamma^2}$ *ssi* l'inégalité de $Cauchy-Schwarz$ appliquée à $[h/id_E]$ est une égalité
ssi h et id_E sont colinéaires *ssi* : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^* \;/\; id_E = \lambda h \in F$.

Si $id_E \in F$, alors id_E s'écrit: $id_E = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$. Comme en **4-** , on obtient $\lambda_i = \lambda$ (indépendant de i) et alors

$id_E = \lambda \sum_{i=1}^{k} p_i$, avec $\lambda \neq 0$. On peut alors écrire: $id_E = \lambda \sum_{i=1}^{k} p_i = \dfrac{\lambda}{a}(a \sum_{i=1}^{k} p_i) = \dfrac{\lambda}{a} h$.

En conclusion: $\boxed{n = \dfrac{k}{1+(k-1)\gamma^2} \Leftrightarrow id_E \in F}$.

Dans le cas d'égalité on a: $a = \dfrac{n}{k}$ $(= \dfrac{1}{1+(k-1)\gamma^2})$ et $k.a = [h/id_E] = [\dfrac{1}{\lambda} id_E/id_E] = \dfrac{1}{\lambda}[id_E/id_E] = \dfrac{1}{\lambda}.n$.

D'où $n = ka = \dfrac{1}{\lambda} n$ soit: $\lambda = 1$ et par suite: $h = id_E$, $h = \dfrac{n}{k} \sum_{i=1}^{k} p_i$. L'égalité $\boxed{k.id_E = n \sum_{i=1}^{k} p_i}$ en résulte.