Corrigé TD 24

Exercice 1 : (Continuité. Fondamental)

On pose pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2x^4-2x^3y^2+y^3)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Cette fonction est-elle continue?

(Solution):

On désigne par U l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$; sur cet ouvert les applications $(x,y)\to\sin(2x^4-2x^3y^2+y^3)$ (composée du sinus et d'une fonction polynôme) et $(x,y)\to x^2+y^2$ (fonction polynôme) sont continues donc leur quotient (parfaitement défini) le sera aussi et ainsi f est bien continue sur U.

En $(0,0)$, on s'inspire de l'exemple traité en cours.

Pour $(x,y)\neq(0,0)$: $|f(x,y)|\leq\dfrac{|2x^4-2x^3y^2+y^3|}{x^2+y^2}$ (ce en vertu de l'inégalité classique : $|\sin(u)|\leq|u|$, conséquence immédiate de l'inégalité des accroissements finis).

Dans ce contexte et par inégalité triangulaire : $|f(x,y)|\leq\dfrac{2x^4+2|x|^3y^2+|y|^3}{x^2+y^2}$ puis (cf cours) en supposant x et y non nuls $|f(x,y)|\leq 2x^2+2|x|^3+|y|$; comme $|f(x,0)|=2x^2$ et $|f(0,y)|=|y|$, il vient (inégalité évidente si $x=y=0$:

$|f(x,y)|\leq 2x^2+2|x|^3+|y|$, ce pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Or $h:(x,y)\to 2x^2+2|x|^3+|y|$ est continue en $(0,0)$ (par composition) et $h(0,0)=0$ donc par encadrement on a bien $f(x,y)\to 0$ si $(x,y)\to(0,0)$ et f est aussi continue à l'origine■

....

....

Exercice 2 : (Fermé)

Prouver que l'ensemble des $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que $x^2+2y^2+3z^2\geq 2025$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

(Solution):

Désignons par F cet ensemble et par $f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\to x^2+2y^2+3z^2-2025$ donc $F=f^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

f est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}$, par théorème, F est bien une partie fermée de $\mathbb{R}^3$■

....

....

Exercice 3 : (CCP PSI 2019 écrit)

L'objectif des trois questions est , en supposant que C et D commutent, de démontrer la relation:

$$\det\left(\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right)=\det(AD-BC) \tag{1}$$

Q1. Montrer l'égalité (1) dans le cas où D est inversible.

Q2. On ne suppose plus D inversible. Montrer qu'il existe $p_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p\geq p_0$, $D+\dfrac{1}{p}I_n$ est inversible.

Q3. En déduire que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

....

....

Exercice 4 : (X)

Soient K un compact d'un evn de dimension finie et $f:K\to K$ telle que : $\forall(x,y)\in K^2, x\neq y, \|f(x)-f(y)\|<\|x-y\|$.

1) En étudiant $x\to d(x,f(x))$, prouver que f possède un point fixe unique. (Ind : Commencer par l'unicité et utiliser le théorème de Weierstrass pour l'existence).

2) Proposer une méthode effective pour déterminer ce point fixe.
(Solution):
1) On prend a et b deux points fixes de f soit $f(a) = a$ et $f(b) = b$, où $(a, b) \in K^2$.
Si $a \neq b$ alors $\|a - b\| = \|f(a) - f(b)\| < \|a - b\|$, ce qui est absurde donc unicité du point fixe.
On remarque que f est en particulier 1- lipschitzienne sur K donc y est continue et, par opérations sur les fonctions continues, $g : x \to \|f(x) - x\|$ l'est aussi et prend ses valeurs dans R. Par le théorème de Weierstrass (puisque K est un compact de E), g admet sur K un minimum. Il existe donc $a \in K$ tel que $g(a) \leq g(x)$ pour tout $x \in K$.
Supposons $f(a) \neq a$ alors $g(f(a) < g(a)$ et $f(a) \in K$; c'est absurde donc a point fixe (unique) de f.
2) En se référant au cas monovariable, on peut conjecturer que la suite déterminée par $x_0 \in \mathbb{K}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers le point fixe de f■

....

....

Exercice 5 :
$(E, \|.\|)$ est un evn de dimension finie. Prouver que : $x \in E \to \dfrac{1}{1 + \|x\|} x$ est continue et injective.
Quelle est son image?

....

....

Exercice 6 : (Norme subordonnée)
On se donne N une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{K}) \overset{def}{=} E$ et on note S la sphère unité de (E, N)
1) Justifier (en la décomposant) la continuité de $f_A : X \in E \to N(AX)$, où A est un élément de $M_n(\mathbb{K})$.
2) On garde les notations précédentes; établir l'existence d'un X_0 de S tel que : $\forall X \in S$, $f_A(X) \leq f_A(X_0)$.
3) En déduire que $\forall X \in E$, $f_A(X) \leq f_A(X_0) N(X)$.
Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose alors $||A|| = f_A(X_0)$.
4) Montrer que $||.||$ est une norme sur $M_n(\mathbb{K})$.
5) Vérifier que $||AB|| \leq ||A|| \times ||B||$ pour tout $(A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$.
(Solution):
4) L'énoncé peut prêter à confusion (X_0 dépendant bien sûr de A nous le noterons donc X_A).
La positivité, l'homogénéité se vérifient sans problème.
Si $||A|| = 0$ alors avec 3) $\forall X \in E, f_A(X) = 0$ et, par séparation pour N, $AX = 0_{n,1}$ donc $A = 0_n$.
Enfin pour $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $||A + B|| = N((A + B)X_{A+B}) \leq N(AX_{A+B}) + N(BX_{A+B})$ (inégalité triangulaire pour N) puis $N((A + B)X_{A+B}) \leq N(AX_A) + N(BX_B) = ||A|| + ||B||$.
5) $||AB|| = N((AB)X_{AB}) = f_A(BX_{AB}) \leq ||A|| N(BX_{AB}) = ||A|| f_B(X_{AB})$, ce par 3) et en utilisant à nouveau cette question $f_B(X_{AB}) \leq ||B||$ puisque $N(X_{AB}) = 1$ d'où l'inégalité souhaitée■