TD25 : Corrigé

$(E, \|.\|)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé.

Exercice 1 : (Condition suffisante de continuité)
Soit $f \in L(E, \mathbb{R})$ (donc une forme linéaire sur E).
On suppose qu'il existe un réel $k \geq 0$ tel que :
$\forall x \in E, |f(x)| \leq k\,\|x\|$.
Etablir que f est continue dans ce contexte. (On montrera qu'elle est lipschtzienne)
Solution :
Compte tenu de l'inégalité vérifiée par f et par linéarité on a tout de suite et pour tout $(x, y) \in E^2$: $|f(x) - f(y)| = |f(x - y)| \leq k\,\|x - y\|$ donc f est bien continue car k-lipschitzienne■

Dans les deux exercices suivants : $E = C^0(I = [0,1], \mathbb{R})$ est muni principalement de la norme de la convergence uniforme (i.e $\|.\|_\infty^I$).

Exercice 2 : (Continuité relative)
Soit $\phi : f \in E \to f(0)$.
1) Prouver que ϕ est continue.
On munit ponctuellement E de la norme $N : f \in E \to \displaystyle\int_0^1 |f|$.
Pour $n \geq 1$ et $t \in I$, on définit $f_n(t) = 0$ si $t \geq 1/n$ et $f_n(t) = 1 - nt$ sinon.
2) Prouver que ϕ n'est plus continue dans ce contexte.
Solution :
1) Pour tout $f \in E$,$|f(0)| \leq \max\limits_{x \in I}|f(x)| = \|f\|_\infty^I$.
On est dans le contexte de l'exercice précédent avec $k = 1$ donc ϕ est continue sur E.
2) Pour tout $n \geq 1$: $N(f_n) = \dfrac{1}{2n}$ ainsi $N(f_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ alors que la suite $(f_n(0))$ converge vers 1 qui n'est pas la valeur prise par la fonction nulle en 0. ϕ n'est plus continue dans ce contexte■

Exercice 3 : (formes linéaires positives sur E)
On se donne θ une forme linéaire sur E pour laquelle :
$f \geq 0 \Longrightarrow \theta(f) \geq 0$.
Montrer que θ est continue.
Solution :
Il suffit d'observer que $\|f\|_\infty^I - f \geq 0$ donc que $\theta(f) \leq \theta(1)\,\|f\|_\infty^I$ puis que $\|f\|_\infty^I + f \geq 0$ pour en déduire que $|\theta(f)| \leq \theta(1)\,\|f\|_\infty^I$. On conclut avec l'exercice 1■

Exercice 4 : (une touche préhilbertienne)
Ici E est muni d'un produit scalaire et on considère une suite orthonormée (x_n) de E.
Vérifier que cette suite diverge pour la norme associée au produit scalaire.
Solution :
On peut remarquer que $\|x_n - x_{n+1}\|^2 = 2$, ce pour tout n, ce qui interdit à la suite $(x_n - x_{n+1})$ de converger vers 0■