Feuille d'exercices 10
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 3.

(b)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ x & - & y & - & z & + & t & = & b \\ -x & - & y & + & z & + & t & = & c \\ -3x & + & y & - & 3z & - & 7t & = & d \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ & - & 2y & - & 2z & & & = & b-a \\ & & & & 2z & + & 2t & = & c+a \\ & & 4y & & & - & 4t & = & d+3a \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{2} \\ L_4 \leftarrow \frac{L_4}{4}}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ & & y & + & z & & & = & \frac{a-b}{2} \\ & & & & z & + & t & = & \frac{a+c}{2} \\ & & y & & & - & t & = & \frac{3a+d}{4} \end{array}\right.$$

$$\underset{L_4 \leftarrow -(L_4 - L_2)}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ & & y & + & z & & & = & \frac{a-b}{2} \\ & & & & z & + & t & = & \frac{a+c}{2} \\ & & & & z & + & t & = & \frac{-a-2b-d}{4} \end{array}\right.$$

$$\underset{L_4 \leftarrow -(L_4 - L_2)}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ & & y & + & z & & & = & \frac{a-b}{2} \\ & & & & z & + & t & = & \frac{a+c}{2} \\ & & & & & & 0 & = & \frac{-3a-2b-2c-d}{4} \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ \textbf{si}\ 3a+2b+2c+d = 0}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & & & & & = & \frac{a-c}{2} \\ & & y & & & - & t & = & \frac{-b-c}{2} \\ & & & & z & + & t & = & \frac{a+c}{2} \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & + & t & = & \frac{a+b}{2} \\ & & y & & & - & t & = & \frac{-b-c}{2} \\ & & & & z & + & t & = & \frac{a+c}{2} \end{array}\right.$$

$$\iff \quad (x,y,z,t) = t(-1,1,-1,1) + \frac{1}{2}(a+b,-b-c,a+c,0),$$

donc $S = \mathbb{R}(-1,1,-1,1) + \dfrac{1}{2}(a+b,-b-c,a+c,0)$ (c'est une droite de $\mathbb{R}^4$) si $3a+2b+2c+d=0$, et $S = \emptyset$ sinon.

Exercice 6.

(a) Soit M une solution. Alors :

$$M \times A = M \times M^2 = M^3 = M^2 \times M = A \times M,$$

donc M et A commutent.

(b) Notons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une solution. Comme $AM = MA$, on a : $\begin{cases} a+g &= a \\ 4d+2g &= g \\ 9g &= g \\ b+h &= 4b \\ 9h &= 4h \end{cases}$,

donc $b = d = g = h = 0$. Donc : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

On en déduit : $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & c(a+i) \\ 0 & e^2 & f(e+i) \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix}$, donc : $M^2 = A \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 &= 1 \\ e^2 &= 4 \\ i^2 &= 9 \\ c(a+i) &= 1 \\ f(e+i) &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \pm 1 \\ e &= \pm 2 \\ i &= \pm 3 \\ c &= \frac{1}{a+i} \\ f &= \frac{2}{e+i} \end{cases}$.

Les « racines carrées » de A sont donc les éléments de l'ensemble

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & \dfrac{1}{a+i} \\ 0 & e & \dfrac{2}{e+i} \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid a = \pm 1,\ e = \pm 2,\ i = \pm 3 \right\}.$$

Il y a en a 8 !

Exercice 15.

(a) Supposons $I_n + M$ non inversible, alors le système de matrice augmentée $(I_n + M | 0_{n,1})$ admet une solution non nulle ; c'est-à-dire qu'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nule tel que $(I_n + M)X = 0_{n,1}$, c'est-à-dire tel que $MX = -X$. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors : $X^\intercal X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, et :

$$X^\intercal X = -X^\intercal MX = -(X^\intercal MX)^\intercal = X^\intercal MX = -X^\intercal X,$$

donc $X^\intercal X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$, donc $X = 0_{n,1}$, ce qui est absurde. Donc $I_n + M$ est inversible.

(b) On a directement : $A^{-1} = (I_n + M)(I_n - M)^{-1}$, et $A^\intercal = ((I_n + M)^{-1})^\intercal (I_n - M)^\intercal = (I_n - M)^{-1}(I_n + M)$. Il reste à montrer que ces matrices commutent :

$$\begin{aligned} (I_n + M)(I_n - M)^{-1} = (I_n - M)^{-1}(I_n + M) \quad &\Leftrightarrow \quad (I_n - M)(I_n + M) = (I_n + M)(I_n - M) \\ &\Leftrightarrow \quad I_n - M + M - M^2 = I_n + M - M - M^2, \end{aligned}$$

ce qui est vrai, donc par équivalence les matrices commutent. Donc $A^\intercal = A^{-1}$.