Test du 29 janvier et son corrigé

Exercice 1 : (Famille sommable)
$L = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
On pose, pour $(p,q) \in L$, $a_{p,q} = \dfrac{(-1)^{pq}}{p^2q^2}$. Etablir la sommabilité de cette famille et déterminer S sa somme.
Solution :
a) Il suffit de montrer que la somme double $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}(\sum_{q=1}^{\infty}|a_{p,q}|) < +\infty$.

C'est bien le cas puisque cette somme double est le carré de la somme (finie) $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}$.

On rappelle (cf TD 26 exercice 4) que $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}$ puis que $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q}{q^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ et enfin $\displaystyle\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{(2q+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
b) On peut donc puisque notre famille est sommable (Fubini) écrire que :
$S = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}(\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^{pq}}{q^2})$.
Une sommation par paquets séparant le pair et l'impair donne alors :
$S = \displaystyle(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2})(\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^2}) + (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2})(\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q}{q^2})$.

Donc compte tenu des rappels : $S = \dfrac{\pi^4}{144} - \dfrac{\pi^4}{96} = \boxed{-\dfrac{\pi^4}{288}}$ ■

Exercice 2 : (Probabilités)
Soit n un entier naturel non nul.
Dans une urne se trouvent n boules rouges et n boules blanches. On tire deux par deux , sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne.
Cet aléa est modélisé par un espace probabilisé non nécessaire à définir qui fait qu'à chaque étape les tirages sont équiprobables.
Pour $j \in [\![1,n]\!]$, E_j désigne l'événement : au $j-ième$ tirage on obtient une boule de chaque couleur.
1) Quelle est la probabilité de tirer à chaque fois une boule de chaque couleur?
A_n est l'événement dont on cherche la probabilité.
2) Préciser la limite de $\mathbb{P}(A_n)$ si $n \to \infty$. Commentaires?
Solution :
1)$A_n = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} E_j$ et, par la formule des probabilités composées (on pose $F_j = \displaystyle\bigcap_{s=1}^{j} E_s$) donne :
$\mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}(E_j|F_j)$.
Pour $j \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(E_j|F_j)$ est la probabilité de tirer 2 boules des deux couleurs dans une urne n'en comportant plus que $n-j+1$ de chaque couleur. Par équiprobabilité cela donne $\mathbb{P}(E_j|F_j) = \dfrac{(n-j+1)^2}{\binom{2(n-j+1)}{2}}$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}}$.
2) Avec Stirling cette suite tend vers 0. Ce qui montre, par continuité décroissante, que l'intersection de tous les A_n est négligeable. Soit que tirer systématiquement deux boules de même couleur est un événement de probabilité nulle.