Devoir à la maison n$^\circ$ 8

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) Comme la suite (u_n) converge vers 0, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon$.
De plus : $\forall n \geq N,\ v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k + \dfrac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} u_k$.
Par conséquent, par inégalité triangulaire :

$$\forall n \geq N, \quad |v_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\varepsilon,$$

d'où l'inégalité voulue.

(b) Soit $\varepsilon' > 0$. On cherche N' tel que : $\forall n \geq N',\ |v_n| \leq \varepsilon'$. Comme l'assertion de la question précédente a été démontrée pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, elle est vraie pour tout $\varepsilon > 0$. Posons donc $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$, soit $N \in \mathbb{N}$ correspondant.
Notons $c = \displaystyle\sum_{k=1}^{N}|u_k|$. C'est une constante, donc la suite $\left(\dfrac{c}{n}\right)$ converge vers 0. Soit donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\dfrac{c}{n}\right| \leq \varepsilon$. Posons finalement $N' = \max(N, N_1)$, alors :

$$\forall n \geq N', \quad |v_n| \leq \varepsilon + \frac{n-N}{n}\varepsilon \leq 2\varepsilon = \varepsilon'.$$

La suite (v_n) est donc convergente vers 0.

2. Comme la suite (u_n) converge vers l, la suite (x_n) converge vers 0, donc, d'après la question 1., la suite (y_n) de terme général $y_n = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ converge également vers 0. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \frac{(u_1 - l) + \ldots + (u_n - l)}{n} = v_n - l,$$

donc la suite $(v_n - l)$ converge vers 0, donc la suite (v_n) converge vers l.
Remarque : Cette propriété est connue sous le nom de lemme de Cesàro. *La suite* (v_n) *est appelée* moyenne de Cesàro *de la suite* (u_n).

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n}$, donc la suite (v_n) est de la forme précédente avec $(u_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Comme (u_n) converge vers 0, (v_n) également d'après la propriété démontrée.

Exercice 2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

1. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions usuelles dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = e^x + 1 > 0,$$

donc la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus f_n est continue car dérivable donc, d'après le théorème de la bijection monotone, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f_n(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[= \mathbb{R}$. En particulier, 0 a donc exactement un antécédent par f_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, on a $e^{x_{n+1}} + x_{n+1} = n+1$, donc :

$$f_n(x_{n+1}) = e^{x_{n+1}} + x_{n+1} - n = (n+1) - n = 1.$$

Comme $f_n(x_n) = 0$ et que la fonction f_n est strictement croissante, on a donc $x_n < x_{n+1}$. La suite (x_n) est donc croissante, donc tend vers une limite finie l ou vers $+\infty$. Si elle converge vers l, alors $(e^{x_n} + x_n)$ converge vers $e^l + l$, ce qui est absurde puisque c'est la suite (n). Donc (x_n) tend vers $+\infty$.

3. Comme $f_n(0) = 1 - n \leq 0$ et que $f_n(\ln n) = \ln n > 0$, et comme f_n est strictement croissante : $0 \leq x_n < \ln n$. Par conséquent, $0 \leq \dfrac{x_n}{n} < \dfrac{\ln n}{n}$, donc par encadrement, $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$ converge vers 0.
Donc $\ln\left(1 - \dfrac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x_n}{n}$. Or : $\forall n \geq 2$, $0 \leq \dfrac{x_n}{n\ln n} < \dfrac{1}{n}$, donc par encadrement $\dfrac{x_n}{n\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{x_n}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}(\ln n)$. Donc $\ln\left(1 - \dfrac{x_n}{n}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}(\ln n)$.

4. Comme $f_n(x_n) = 0$, on a $e^{x_n} = n - x_n$, donc $x_n = \ln(n - x_n) = \ln(n) + \ln\left(1 - \dfrac{x_n}{n}\right)$. D'après la question précédente, on a donc $x_n = \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln n)$, c'est-à-dire $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

5. D'après la question précédente, on a $y_n = \ln\left(1 - \dfrac{\ln(n) + y_n}{n}\right)$.
On sait également que $y_n = \underset{n\to+\infty}{o}(\ln n)$, donc $\dfrac{\ln(n) + y_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n) + y_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n}.$$

Remarque : On a donc établi le développement asymptotique *suivant :*

$$x_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$