
Corrigé partiel TD 29 (V.a.d)

Exercice 1 : Le nombre de clients quotidiens d'une grande surface N suit une loi de Poisson de paramètre λ; la probabilité qu'un client se fasse dérober son portefeuille est de $p, 0 < p < 1$. Ces désagréments sont supposés indépendants. Pour tout entier naturel non nul i , on désigne par X_i la variable aléatoire qui donne 1 si le client numéro i est victime de vol et 0 sinon. Compte tenu de ce qui précède, il s'agit donc de v.a.d.i suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

1) Préciser la loi de $\sum_1^n X_i$. Interpréter cette variable aléatoire somme.

On désigne par Y le nombre de portefeuilles volés quotiennement
2) Pour tout couple (n, m) d'entiers naturels, donner $\mathbb{P}(Y = m|N = n)$.
3) En déduire à l'aide de la formule des probabilités totales la loi de Y.
4) Espérance mathématique de Y?

Exercice 2 : (Algèbre linéaire)
Soit n un entier naturel non nul.
On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!] = I$.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in I^2, \quad p_{ij} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1. Déterminer la valeur du réel α.

2. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.

3. Les deux variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. En déduire l'espérance de la variable aléatoire X.

5. On note $B \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est :

$$b_{ij} = \mathbb{P}_{[X=j]}([Y = i]).$$

   Calculer les b_{ij}.

6. Déterminer $rg(B)$ et les sous-espaces vectoriels $Im(B)$ et $Ker(B)$.

7. Déterminer une matrice colonne $C \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $L \in M_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telles que $B = CL$.

8. Démontrer que $B^2 = tr(B)B$.

9. Déterminer les valeurs propres de B. B est-elle diagonalisable ?

Solution :

5) Puisque $X \perp\!\!\!\perp Y$, $b_{i,j} = \mathbb{P}(Y = i) = 2^{-n}\binom{n}{i-1}$.

6) Le rang de B est égal à 1 puisque toutes les colonnes sont identiques et que la matrice n'est pas nulle.

Donc $Im(B) = Vect(C_1)$ et $Ker(B) = Vect(E_2 - E_1, ..., E_{n+1} - E_1)$ où $(E_1, ..., E_{n+1})$ base canonique de $M_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

7) Il vient sans difficulté $C = C_1$ (première colonne de B) et $L = (1.....1)$.

8) Simple calcul.

9) Ce qui précède livre $X^2 - tr(B)X$ comme polynôme annulateur de B et celui-ci est scindé sur et à racines simples ($tr(B) > 0$) donc B dz■

Exercice 3 : (Algèbre linéaire)

On considère la famille $X_1, \ldots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

Soit M une variable aléatoire discrète de Ω dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout ω dans $\Omega, M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega) = diag\,(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

On note T la variable aléatoire $tr(M)$.

1. Déterminer $T(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T.

2. Donner la loi de probabilité de T et l'espérance de la variable aléatoire T.

3. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $R = rg(M)$.

   On note D la variable aléatoire $\det(M)$.

4. Déterminer $D(\Omega)$.

5. Donner la loi de probabilité de D et calculer l'espérance de la variable aléatoire D.

   On se propose de déterminer la probabilité de l'évènement Z :
   " les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension" .

6. On note V l'évènement : " M ne possède qu'une seule valeur propre " . Calculer $\mathbb{P}(V)$.

7. On suppose n impair. Déterminer $\mathbb{P}(Z)$.

8. On suppose n pair et on pose $n = 2r$. Calculer $\mathbb{P}(T = r)$. En déduire $\mathbb{P}(Z)$.

   Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A(\omega) = U(\omega) \times (U(\omega))^\top = (a_{ij}(\omega))_{[\![1,n]\!]^2}$.

9. Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij}(\omega)$.

10. Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire a_{ij}.

11. Montrer que $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

12. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $rg(A)$.

13. Pour tout ω dans Ω, donner les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$.

14. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $rg(A)$.

Exercice 4 : (Loi géométrique)
Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0,1[$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y, la variable aléatoire définie par :

$$Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$$

1. Représenter dans un repère orthonormal la fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.

2. Déterminer $Y(\Omega)$.

3. Soit k un entier naturel non nul.
   Écrire l'événement $(Y = k)$ à l'aide d'événements $(X = j)$ où j est un entier naturel non nul.

4. Déterminer la loi de Y.

Solution :
2) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
3) $(Y = k)$ est aussi l'événement $(X \in \mathbb{N}^*, 2k-1 \leq X < 2k+1)$ soit $(X = 2k-1) \cup (X = 2k)$.
4) Par additivité $P(Y = k) = p(q^{2k-2} + q^{2k-1}) = p(1+q)q^{2k-2}$, ce pour tout k entier naturel non nul.
Ainsi $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q^2)$■