Corrigé du TD 30 : Centrale 2023 (Partie III, Proba)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

On admet que, pour tout $x \in]-1/4, 1/4[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}. \quad (1)$$

et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}. \quad (2)$$

Dans cette troisième partie, toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

La lettre p désigne un nombre réel de l'intervalle $]0, 1[$.

III.A- Un conditionnement

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi géométrique de paramètre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = pq^{n-1}.$$

On posera $q = 1 - p$.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est la loi de Poisson de paramètre n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k | X = n) = \frac{p}{e} \left(\frac{q}{e}\right)^{n-1} e^{-n} \frac{n^k}{k!}.$$

- Déterminer la loi conjointe de X et Y .

Solution :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(Y = k, X = n) = \mathbb{P}(Y = k | X = n)\mathbb{P}(X = n) = \frac{p}{e} \left(\frac{q}{e}\right)^{n-1} \frac{n^k}{k!} \blacksquare$$

- Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$ et montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{p}{(1-p)k!} f_k \left(\frac{1-p}{e} \right),$$

où f_k est la fonction définie en début d'énoncé.

Solution :

k est un entier naturel.

$(X_n)_{n \geq 1}$ étant un système complet d'événements, nous disposons par la formule des probabilités totales de :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{p}{ek!} \sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(\frac{q}{e}\right)^{n-1}.$$

$$\text{Si } k = 0, \text{ on récupère } \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{p}{e} \frac{1}{1 - \frac{q}{e}} = \frac{p}{e - q} = .$$

$$\text{Sinon } \mathbb{P}(Y = k) = \frac{p}{qk!} \sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(\frac{q}{e}\right)^n = \frac{p}{qk!} f_k \left(\frac{q}{e} \right) \blacksquare$$

3. Vérifier que l'on a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = 1$.

Solution :

On va utiliser le principe de Fubini pour les séries doubles à termes positifs. La finitude du résultat obtenu le validera.

En premier lieu :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p}{qk!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k \left(\frac{q}{e}\right)^n = \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{e}\right)^n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} = \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{e}\right)^n (e^n - 1) = \frac{p}{q} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{1 - (q/e)}\right) = \frac{1}{q} - \frac{ep}{q(e-q)}$$

$$\text{D'où } \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{q} - \frac{ep}{q(e-q)} + \frac{p}{e-q} = 1 \blacksquare$$

4. Montrer que Y admet une espérance finie et calculer cette espérance.

Solution :

$$\text{Même démarche avec } \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(Y = k) = \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{e}\right)^n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^k}{(k-1)!} = \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{e}\right)^n ne^n = \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{1}{p} \text{ (avec Q3 de l'énoncé du concours) } \blacksquare$$

5. Montrer que Y admet une variance et calculer cette variance.

Solution :

$$\text{Corrigé en détail en classe. On trouve } V(Y) = \frac{1}{p^2} \blacksquare$$

III.B- Pile ou face infini

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de « faire pile » est p . Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n = 1]$ désigne l'événement « le n -ième lancer donne pile » et $[X_n = 0]$ désigne l'événement « le n -ième lancer donne face ».

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n et B_n par

— A_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces » ;

— B_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces ».

Par exemple si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 n'est pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.

Enfin on définit C , « au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces ». On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont des événements, et que C est un événement.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ et en déduire $\mathbb{P}(A_n)$.

Solution :

On a immédiatement $A_n = \left(\sum_{i=1}^{2n} X_i = n\right)$; compte tenu des hypothèses $\sum_{i=1}^{2n} X_i \leftrightarrow \mathcal{B}(2n, p)$, il vient donc

$$\mathbb{P}(A_n) = \binom{2n}{n} (pq)^n \blacksquare$$

2. Montrer que les événements $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont (deux à deux) incompatibles.

Solution :

Prenons $n < m$ deux entiers naturels non nuls. On a bien $B_n \cap B_m = \emptyset$ puisque la première fois qu'il y a autant de piles que de faces s'est déjà produite à l'issue de $2n < 2m$ lancers $\blacksquare$

3. Montrer que C est un événement et que $\mathbb{P}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Solution :

Pour que la parité pile face se produise une fois au moins, elle doit avoir lieu une première fois donc $C \subset \bigcup_{n \geq 1} B_n$ et en tant que réunion dénombrable d'événements, C en est un aussi.

Par la question précédente et sigma-additivité, nous avons bien : $\mathbb{P}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$ ■

4. On pose $A_0 = \Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$.

Solution :

On pose $B_0 = \Omega \setminus C$. On dispose alors en $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'un système complet d'événements ce qui nous permet d'écrire via la formule des probabilités totales (et pour tout $n \geq 1$) :

$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_n \cap B_k)$ en éliminant les événements impossibles. Puis en passant aux probabilités conditionnelles avec la convention d'usage.

$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_n|B_k)\mathbb{P}(B_k)$ mais pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ $\mathbb{P}(A_n|B_k) = \mathbb{P}(A_{n-k})$ puisque à partir du k -ième lancer on repart comme en début d'épreuve. Pour $k = n$ $\mathbb{P}(A_n|B_k) = 1 = \mathbb{P}(\Omega)$. Ainsi la formule est-elle validée ■

5. À l'aide notamment de la formule (2), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} (p(1-p))^n.$$

Solution :

Le plus simple est de raisonner par récurrence forte (compte tenu du résultat obtenu en Q4).

B_1 est en fait l'événement sur les deux premiers lancers "j'ai obtenu 1 pile et un face" donc $\mathbb{P}(B_1) = pq + qp = 2pq$ et l'initialisation est confirmée.

Supposons la formule à valider vraie jusqu'au rang $n-1$; grâce à la question précédente (Rappel : $1 = \mathbb{P}(A_0)$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \binom{2n}{n} (pq)^n - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \binom{2(k-1)}{k-1} \binom{2(n-1-(k-1))}{n-1-(k-1)} (pq)^n \text{ soit après changement d'indice} \\ j = k-1 \text{ et utilisation de (2), } \mathbb{P}(B_n) &= \left(\binom{2n}{n} - 2 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} \binom{2j}{j} \binom{2(n-1-j)}{n-1-j} + 2 \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} \right) (pq)^n = \\ &0 + 2 \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} (pq)^n \text{ et la récurrence se poursuit bien} \blacksquare \end{aligned}$$

6. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}$ (on pourra utiliser la formule (1)).

Solution :

Puisque $p \neq \frac{1}{2}$ $pq \in]0, \frac{1}{4}$ alors puisque on peut utiliser (1) et à l'aide de Q3 de cette partie on récupère facilement le résultat désiré ■

7. On suppose que $p = \frac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1$.

Solution :

Il suffit de montrer que (2) peut se prolonger en $1/4$ et pour cela de montrer que la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$ est continue sur le segment $[0, 1/4]$ et pour cela (cf votre cours sur les séries entières) de montrer que la série (à termes positifs ici) est ACV pour $x = 1/4$, ce qui se vérifie aisément par la règle de d'Alembert pour les STP ■

••• FIN •••