Feuille d'exercices 12
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 2.

(c) Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Le terme dominant de $(X^2+1)P''$ est alors $n(n-1)a_nX^n$, tandis que celui de $6P$ est $6a_nX^n$. Par identification, et comme $a_n \neq 0$, on a $n = 3$. Notons donc :

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d,$$

alors $P'' = 6aX + 2b$, donc $(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0 \Leftrightarrow (b = 3d,\ a = c,\ 2b = 6b) \Leftrightarrow (b = d = 0,\ a = c) \Leftrightarrow P = a(X^3 + X)$. On a donc :

$$S = \{a(X^3 + X) \mid a \in \mathbb{C}\}.$$

Exercice 3.

(d) Après calcul : $P = \big(X^2 + (1+i)X + 1 - i\big)\, Q + 0$. En particulier, Q divise P.

Exercice 7. Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et notons $Q = P - X$. On a :

$$\begin{aligned} P \circ P &= \sum_{k=0}^{n} a_k P^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (Q+X)^k \\ &= Q \times T + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &= Q \times T + P \end{aligned}$$

pour un certain $T \in \mathbb{K}[X]$, donc : $P \circ P - X = Q \times T + Q = Q(T+1)$. Donc Q divise $P \circ P - X$.

Exercice 10.

(b)
- Montrons que D est injective. Soient $Q_1, Q_2 \in E$ tels que $D(Q_1) = D(Q_2)$. Alors $Q_1' = Q_2'$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q_1 = Q_2 + \lambda$. Alors $\int_0^1 Q_1(t)dt = \int_0^1 Q_2(t)dt + \int_0^1 \lambda dt$ donc, comme $Q_1, Q_2 \in E$, $\lambda = 0$. Donc $Q_1 = Q_2$. Donc D est injective.
- Montrons que D est surjective. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on cherche $Q \in E$ tel que $D(Q) = P$, c'est-à-dire tel que $Q' = P$. D'après l'exercice 9, il existe $Q_0' \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q_0' = P$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a : $Q' = P \Leftrightarrow Q' = Q_0' \Leftrightarrow Q = Q_0 + \lambda$, puis : $Q_0 + \lambda \in E \Leftrightarrow \int_0^1 Q_0(t)dt + \int_0^1 \lambda dt = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\int_0^1 Q_0(t)dt$. Donc $Q = Q_0 - \int_0^1 Q_0(t)dt$ convient. Donc D est surjective.

Donc D est bijective.

Exercice 12.

(c) Notons $P=(X+1)^n-(X-1)^n$. On cherche les racines de P. Soit $z\in\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(z+1)^n-(z-1)^n=0 &\Leftrightarrow (z+1)^n=(z-1)^n\\ &\Leftrightarrow z+1=e^{i\frac{2k\pi}{n}}(z-1),\ k\in[\![0,n-1]\!]\\ &\Leftrightarrow z \ = \ \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1},\ k\in[\![1,n-1]\!]\\ & \ = \ \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k\pi}{n}}}\\ & \ = \ \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\\ & \ = \ -i\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k\in[\![1,n-1]\!].\end{aligned}$$

Or P est de degré $n-1$, donc les racines de P sont simples ; et son coefficient dominant vaut $2n$, donc :

$$P=2n\prod_{k=1}^{n-1}\left(X+i\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

Exercice 15. On raisonne par analyse-synthèse : supposons qu'il existe P solution.
On sait que $P(0)=0$, puis en évaluant en $X=0$: $P(1)=1$; puis en évaluant en $X=1$: $P(2)=2$; puis en évaluant en $X=5$: $P(5)=5$.
Généralisons ce processus : notons $u_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n^2+1$. Par une récurrence aisée, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ P(u_n)=u_n$.
Le polynôme $Q=P(X)-X$ a donc pour racines tous les termes de la suite (u_n). Comme celle-ci est strictement croissante (le vérifier !), Q a donc une infinité de racines, donc $Q=0_{\mathbb{K}[X]}$. Donc $P=X$.
Réciproquement, $P=X$ est solution.
Finalement :

$$S=\{X\}.$$

Exercice 17. Raisonnons par analyse-synthèse. Soit P solution. Soit $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $Q'=P$, alors :

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ Q(k+1)-Q(k)=k+1,$$

donc le polynôme $T=Q(X+1)-Q(X)-X-1$ a tous les entiers pour racines, donc une infinité de racines. Donc $T=0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc :

$$Q(X+1)-Q(X)=X+1.$$

En dérivant cette égalité, on obtient : $P(X+1)-P(X)=1$, puis en redérivant : $P'(X+1)-P'(X)=0$. En évaluant cette égalité en tout $k\in\mathbb{N}$, on a par une récurrence immédiate :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ P'(k)=P'(0),$$

donc le polynôme $P'(X)-P'(0)$ a tous les entiers naturels pour racines, donc est le polynôme nul. Donc P' est un polynôme constant, donc $P\in\mathbb{R}_1[X]$. Il existe donc $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que :

$$P=\lambda X+\mu.$$

Comme $P(X+1)=P(X)+1$, on a $\lambda(X+1)+\mu=\lambda X+\mu+1$, donc $\lambda+\mu=\mu+1$, donc $\lambda=1$, donc :

$$P=X+\mu.$$

Alors $Q = \frac{1}{2}X^2 + \mu X + \nu$; comme $Q(X+1) = Q(X) + X + 1$, on a $\frac{1}{2}(X+1)^2 + \mu(X+1) + \nu = \frac{1}{2}X^2 + \mu X + \nu + X + 1$, donc $\frac{1}{2} + \mu + \nu = \nu + 1$, donc $\mu = \frac{1}{2}$. Donc :

$$P = X + \frac{1}{2}.$$

Réciproquement, ce polynôme est solution. Finalement :

$$S = \left\{ X + \frac{1}{2} \right\}.$$

Exercice 19.

(a) On note $P = \alpha \prod_{k=1}^{n}(X - r_k)$. Alors $P' = \alpha \sum_{k=1}^{n} \prod_{j \neq k}(X - r_j)$, donc :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{j\neq k}(X - r_j)}{\prod_{j=1}^{n}(X - r_j)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - r_k}.$$

(b) On note $P = \alpha \prod_{k=1}^{m}(X - r_k)^{\alpha_k}$. Alors $P' = \alpha \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (X - r_k)^{\alpha_k - 1} \prod_{j \neq k}(X - r_j)^{\alpha_j}$, donc :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k (X - r_k)^{\alpha_k - 1} \prod_{j\neq k}(X - r_j)^{\alpha_j}}{\prod_{j=1}^{m}(X - r_j)^{\alpha_j}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{X - r_k}.$$