Corrigé partiel du TD 32 : Probabilités

Si ce n'est pas précisé les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 : (Probabilité et Algèbre linéaire)

1. **Étude de la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**
   On considère $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier que si $\alpha \neq \beta$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que si $\alpha = \beta$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. **Calcul de la probabilité qu'une matrice aléatoire soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**
   Dans cette section, X et Y désignent deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant une loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2, avec $(p_1, p_2) \in]0, 1[^2$; c'est-à-dire
   $$X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(p_1\right) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(p_2\right).$$
   On considère la variable aléatoire discrete $M : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :
   $$\forall \omega \in \Omega, \quad M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}.$$
   Calculer, en fonction des paramètres p_1 et p_2, la probabilité que la matrice M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 2 : (CCINP MP 2024)

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu.
   Calculer, pour tout entier naturel k, $P(X \leqslant k)$, puis donner la loi de X.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la formule des traînes déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

Exercice 3 : (Olé pour Léo : Mines)
On se plaçe dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
1) Soit S un événement et 1_S, sa fonction indicatrice[1]; établir que celle-ci suit une loi de Bernoulli et vérifier que $E(1_S) = \mathbb{P}(S)$. (Ainsi toute probabilité peut se voir comme une espérance mathématique).
2) Etablir qu'inversement toute variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli est une indicatrice.
3) Vérifier que si A et B sont des événements on a :
i) $1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$.
ii) $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$.
iii) En supposant A et B disjoints, vérifier aussi que $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$.
4) On suppose les événements A et B indépendants et on pose $Z = 1_A + 1_B$.
a) Préciser $Z(\Omega)$.
On pose $a = \mathbb{P}(A)$ et $b = \mathbb{P}(B)$.
b) Déterminer la loi de Z.

[1]Rappel : elle vaut 1 si $\omega \in S, 0$ sinon, ω étant un élément de Ω.

c) On veut montrer qu'il existe $k \in \{0,1,2\}$ tel que $\mathbb{P}(Z=k) \geq 4/9$.
i) Etablir que c'est le cas pour $b=0$ et $b=1$.
On fixe $b \in]0,1[$ et on suppose que pour $k \in \{0,2\}$ tel que $\mathbb{P}(Z=k) < 4/9$.
ii) Etablir que $a \in]1-\dfrac{4}{9(1-b)}, \dfrac{4}{9b}[$ puis que $\mathbb{P}(Z=1) \geq 4/9$.
Solution :
1)C'est bien une v.a.d sur notre espace probabilisé (c'est un résultat de première année) car l'ensemble des valeurs prises est fini donc au plus dénombrable et que les images réciproques de 1 et 0 sont respectivement S et son complémentaire.
Par ailleurs et compte tenu des valeurs prises, elle suit bien une loi de Bernoulli dont le paramètre est la probabilité de l'événement $(1_S = 1)$ qui n'est rien d'autre que l'événement $1_S^{-1}(\{1\}) = S$ donc 1_S suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(S)$; c'est aussi son espérance mathématique. On voit par là que toute probabilité peut s'interpréter comme espérance mathématique (et vice versa)$\blacksquare$
2) Considérons $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors en posant $S = X^{-1}(\{1\})$, on a tout de suite $X = 1_S$$\blacksquare$
3) Vérifications élémentaires$\blacksquare$
4)a) $Z(\Omega) = \{0,1,2\}$.
b) On a $(Z=0) = \overline{A} \cap \overline{B}$ donc $\mathbb{P}(Z=0) = (1-a)(1-b)$ (par indépendance de A et B).
Similairement $\mathbb{P}(Z=2) = ab$.
Enfin $(Z=1) = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ d'où $\mathbb{P}(Z=1) = (1-a)b + a(1-b)$$\blacksquare$
c)i) Si $b=0$ l'événement $(Z=0)$ ou l'événement $(Z=1)$ fait l'affaire.
Si $b=1$ l'événement $(Z=2)$ ou l'événement $(Z=1)$ fait l'affaire.
ii) L'encadrement de a est immédiat à obtenir.
En fixant b, en notant $I = [1-\dfrac{4}{9(1-b)}, \dfrac{4}{9b}]$ et en posant $f(a) = (1-a)b + a(1-b) = b + a(1-2b)$, pour $a \in I$.
Il s'agit de montrer que $f \geq 4/9$ sur I.
On note que c'est évident si $b = 1/2$.
On traite le cas $0 < b < 1/2$, f est alors croissante. On considère $f(1-\dfrac{4}{9(1-b)}) = \dfrac{4b}{9(1-b)} + 1 - b - 4/9 = \dfrac{4}{9(1-b)} + 1 - b - 8/9$. Une simple étude de fonction montre que cette expression atteint son minimum en $1/3$ et donne comme valeur de ce minimum $4/9$. On traite de même le cas $1/2 < b < 1$$\blacksquare$

Exercice 4 : (Loi de Poisson)
On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Existence et valeur de $E(\dfrac{1}{X+1})$.

Exercice 5 : (Loi de Pascal)
On suppose que X suit une loi de Pascal de paramètre $(r,p) \in \mathbb{N}^* \times]0,1]$ si :
$X(\Omega) = [r, \infty[\cap \mathbb{N}$ et $\forall n \geq r, \mathbb{P}(X=n) = \dbinom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$.
1) Montrer que ces relations définissent bien une loi de probabilité et déterminer la fonction génératrice de X.
2) Etablir que X possède une espérance mathématique que l'on calculera.
(Réponses : $t \to \dfrac{(pt)^r}{(1-qt)^r}, E(X) = \dfrac{r}{p}$).
3) On lance une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité de tomber sur pile vaut p.
On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de lancers pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de Y?
Solution :
3)i)$Y(\Omega) = [r, \infty[\cap \mathbb{N}$.
ii) Soit $n \geq r$. L'événement $Y = n$ correspond à l'obtention sur n lancers (et pas moins) de r pile donc de $n - r$ face.
Les tirages donnant face se positionnent entre le premier et le $n-1$ i-ème. Ce nombre de tirages vaut $\dbinom{n-1}{n-r} = \dbinom{n-1}{r-1}$.
Autrement dit puisque on affaire à une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles et équiprobables dont

chaque probabilité vaut $p^r q^{n-r}$ que $\mathbb{P}(Y=n) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$ et Y suit donc la loi de Pascal précédemment étudiée$\blacksquare$

Une solution moins prosaïque consiste à introduire r variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre p. Celles-ci peuvent se voir comme variable aléatoire donnant le nombre de lancers pour obtenir un pile. Leur somme suit donc la même loi que Y. Comme vu en classe (via les fonction génératrices) cette somme suit une loi de Pascal de paramètres p et $r$$\blacksquare$

Exercice 6 : (Carlos et Jannik)[2]

C et J s'affrontent en finale du tournoi de Bellevue (Masters 1000).

C a gagné le toss et décide de servir. Lorsqu'il sert, la probabilité qu'il gagne le point est de $p > 1/2$.

On suppose les points joués indépendants et on note X (resp. Y) la variable aléatoire renvoyant le nombre de points à jouer pour que C (resp. J) gagne ce premier jeu.

a) Préciser $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

b) Déterminer les lois de X et Y.

c) Que penser de l'événement : "le premier jeu ne se finit pas" ?

[2] Exercice carambarisé.