Corrigé du DS6 (4h) : CCINP

• La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés.
• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert et bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

1 Premier Problème

Un concours de tir entre deux compétiteurs A et B est constitué d'une suite d'épreuves consistant, pour chaque compétiteur, en un tir visantà atteindre une cible. A et B tirent simultanément, l'un et l'autre disposant d'une cible personnelle. On associe à ce concours une expérience aléatoire pour laquelle il ne sera pas nécessaire de définir un espace probabilisé. On émet néanmoins les hypothèses suivantes :
A chaque tir :
i) la probabilité que A touche sa cible est de $\dfrac{2}{3}$.
ii) la probabilité que B touche sa cible est de $\dfrac{1}{2}$.
iii) les performances de A et B sont indépendantes.
Les tirs successifs sont mutuellement indépendants.
A l'issue de chaque tir, il faut avoir touché sa cible pour poursuivre la compétition; sinon, le candidat est éliminé. Le concours cesse dès que A et B sont éliminés.
Pour n entier naturel non nul, on considère les événements :
A_n : A est le seul à rester en lice à l'issue du $n-ième$ tir,
B_n : B est le seul à rester en lice à l'issue du $n-ième$tir,
C_n : aucun candidat n'est éliminé à l'issue du $n-ième$ tir,
D_n : les deux candidats sont éliminés à l'issue du $n-ième$ tir.
Première élimination
On s'intéresse ici au nombre d'épreuves à l'issue desquelles intervient la première élimination.
1) Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :
$\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n), \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n), \mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n)$
$\mathbb{P}(B_{n+1} \mid A_n), \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n), \mathbb{P}(B_{n+1} \mid C_n)$
$\mathbb{P}(C_{n+1} \mid A_n), \mathbb{P}(C_{n+1} \mid B_n), \mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n)$
$\mathbb{P}(D_{n+1} \mid A_n), \mathbb{P}(D_{n+1} \mid B_n), \mathbb{P}(D_{n+1} \mid C_n)$.
2) On note T la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur le numéro du tir à l'issue duquel la première élimination a lieu.
On se donne $n \geq 2$.
a) Déterminer $\mathbb{P}(T = 1)$.
b) Prouver que $\mathbb{P}(C_m) = 3^{-m}$, pour tout $m \geq 1$. On précisera sa démarche.
c) Comparer C_n et $(T > n)$.
d) En déduire $\mathbb{P}(T = n)$. Confirmer la cohérence de votre réponse.
3) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} n\ \mathbb{P}(T = n)$ et sa somme, si cela a un sens.
4) T est-elle d'espérance mathématique finie? Si oui, la donner et interpréter alors cette valeur.
Chaîne de Markov
Ici on se penche sur la probabilité de chacune des éventualités observables à l'issue d'un nombre donné de tirs.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(D_n) \end{pmatrix}$.

5) A l'aide de la formule des probabilités totales, prouver qu'il existe une matrice $M \in M_4(\mathbb{R})$ à déterminer, telle que : $\forall n \geq 1, X_{n+1} = MX_n$.

On pose $\Delta = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Que vaut $P\Delta P$?

7) En déduire que $M^n = P\Delta^n P$, ce pour tout n.

8) Déterminer avec le moins de calculs possible : $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n)$.

Solution :

1) $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = \mathbb{P}(A$ touche sa cible au $n+1$ ième tir$) = 2/3$.

$\mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n) = 0$. $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n) = \mathbb{P}(A$ touche sa cible au $n+1$ ième tir et B la manque $) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3}$, par indépendance. On ne détaille plus : $\mathbb{P}(B_{n+1} \mid A_n) = 0$, $\mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B_{n+1} \mid C_n) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(C_{n+1} \mid A_n) = 0$, $\mathbb{P}(C_{n+1} \mid B_n) = 0$, $\mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2}$. $\mathbb{P}(D_{n+1} \mid A_n) = 1/3$, $\mathbb{P}(D_{n+1} \mid B_n) = 1/2$, $\mathbb{P}(D_{n+1} \mid C_n) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}$.

2)a) $\mathbb{P}(T = 1) = 1 - 1/3 = 2/3$.

b) Voir question 5).

c) C'est le même événement.

d) $\mathbb{P}(C_{n-1} - C_n) = \mathbb{P}(T = n)$ par ce qui précède donc, par décroissance de la suite (C_k), $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(C_{n-1}) - \mathbb{P}(C_n) = 3^{-n+1} - 3^{-n} = \dfrac{2}{3^n}$, ce pour $n \geq 2$; cela reste valable pour $n = 1$.

Pour confirmer la cohérence de ce résultat, il faut se demander si la STP, évidemment convergente ici, $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\dfrac{2}{3^n}\right)$ admet pour somme 1. Comme $\dfrac{2}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{1 - 1/3} = 1$, tout est dans l'ordre.

3) Le critère de d'Alembert assure la convergence de cette série. Pour le calcul de la somme, il suffit d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme à la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, où $u_n : x \to x^n$ sur le segment $[0, 1/3]$. On trouve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(T = n) = \dfrac{3}{2}$.

4) T possède donc une espérance mathématique finie et celle-ci vaut $3/2$; cela signifie qu'en moyenne la première élimination a lieu au premier ou au second tour.

5) Pour chaque $n \geq 1, (A_n, B_n, C_n, D_n)$ constitue un système complet d'événements.

Comme on a $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid D_n) = \mathbb{P}(B_{n+1} \mid D_n) = \mathbb{P}(C_{n+1} \mid D_n) = 0$ et $\mathbb{P}(D_{n+1} \mid D_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$. Dans ce contexte, avec la formule des probabilités totales, il vient :

$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n)\ \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n)\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid D_n)\mathbb{P}(D_n) = \dfrac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \dfrac{1}{3}\mathbb{P}(C_n)$ et de même

$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) + \dfrac{1}{6}\mathbb{P}(C_n), \mathbb{P}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{3}\mathbb{P}(C_n), \mathbb{P}(D_{n+1}) = \dfrac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) + \dfrac{1}{6}\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(D_n)$.

De tout ceci, on déduit que $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Un calcul simple donne $P\Delta P = M$.

7) On vérifie que $P^2 = I_4$ d'où la relation.

8) $X_n = P\Delta^{n-1}PX_1$, ce pour $n \geq 1$, comme la suite $\left(\Delta^{n-1}\right)$ converge vers $diag(0,0,0,1) = \Omega$, par continuité de l'application linéaire $N \to PNP$, la suite $\left(P\Delta^{n-1}P\right)$ converge vers la matrice $P\Omega P = \begin{pmatrix} & & (0) & \\ & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

il s'ensuit que $X_n \to P\Omega P X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc que $\mathbb{P}(D_n) \to 1$, tout cela pour $n \to +\infty$, alors que les autres probabilités tendent vers 0. Ce qui signifie que la partie risque de se terminer plutôt vite...

2 Second Problème

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0 , la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.
On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n = 1$, etc.
On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la fonction notée G_X définie par :

$$G_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j)t^j$$

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

Q1. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1 .
Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$.
Q2. On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».
Exprimer A en fonction des événements $[T_1 = k], k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbb{P}(A)$. Interpréter.
Q3. Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1, puis calculer sa somme.
Q4. En déduire l'espérance et la variance de T_1.
Q5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n. On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi.
On note $D_n = T_1 + \ldots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.
Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice G_{D_n} de D_n.
Q6. Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^a$ au voisinage de $x = 0$ pour $a \in \mathbb{R}$.
En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \dbinom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II - Étude du comportement de la file

II. 1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a(x-1)) \end{cases}$
On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$z_1 \in]0,1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = f(z_n)$$

Q7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, z_n \in]0,1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.
Q8. En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.
Q9. Soit la fonction $\psi : \begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - a(x-1) \end{cases}$.
Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant \psi(x) \Leftrightarrow f(x) \leqslant x$ et $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.
Q10. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$. En déduire que $z_n \to 1$.
Q11. On suppose dans cette question que $a > 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0,1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter. En distinguant les cas $z_1 \in]0,\alpha]$ et $z_1 \in]\alpha,1[$, montrer que $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$.

II. 2 - Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0 .
On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0 . Les variables S et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supposées indépendantes.
On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.
Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe étaient servis.
Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe.
Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $[V_k = 0]$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.
Q12. Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [V_n = 0]$?
Q13. Quelle est la loi du nombre N_n de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1,n]\!]$?
Q14. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(V_1 = k \mid S = n)$.
En déduire que V_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre
Q15. On note $z_n = \mathbb{P}(V_n = 0)$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\mathbb{P}(Z) = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.
Q16. Justifier que pour tout $(j,n) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = j) = \mathbb{P}(V_n = 0)^j$. On distinguera le cas $j = 0$.
Q17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = \exp(\lambda p(z_n - 1))$.
Q18. Déterminer, suivant les valeurs de λp, la limite de la suite $(z_n)_{n\in N}$. Interpréter.
Solution :
On posera $q = 1 - p$.
1) Pour k entier naturel non nul, l'événement $(T_1 = k)$ est aussi $(X_1 = 0, ..., X_{k-1} = 0, X_k = 1)$ donc par indépendance des v.a en jeu on a bien le résultat. Ce qui montre que $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$■
2) A peut se voir comme l'événement, pour tout $k \geq 1$, entre l'instant 0 et l'instant k le premier client n'arrive pas.
Autrement dit $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{(T_1 = k)} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} (T_1 = k)}$ donc $\mathbb{P}(A) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}((T_1 = k))$, ce par sigma-additivité.
Enfin, parce que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$: $\boxed{\mathbb{P}(A) = 1 - 1 = 0}$. A est donc un événement négligeable■
3) et 4) c'est du cours puisque $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$■
5) Par linéarité de l'espérance mathématique et parce que les T_i suivent la loi de T_1 : $\boxed{E(D_n) = \dfrac{n}{p}}$.
L'indépendance mutuelle des T_i $(1 \leq i \leq n)$ assure que $\boxed{V(D_n) = nV(T_1) = \dfrac{nq}{p^2}}$
et aussi $\boxed{G_{D_n} = (G_{T_1})^n : t \in [-1,1] \to (\dfrac{pt}{1-qt})^n}$■

6) Pour $|x|<1$, on sait que $(1+x)^a=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{a}{i}x^i$.
Dès lors pour $|qt|<1$, $G_{D_n}(t)=(pt)^n(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-n}{i}(-qt)^i$ soit en posant $k=i+n$, il vient (dans le même contexte) :
$G_{D_n}(t)=\sum_{k=n}^{\infty}p^nq^{k-n}\binom{k-1}{k-n}t^k$. D'où le résultat attendu, par unicité des coefficients d'une série entière■
On remarquera que D_n suit donc une loi de Pascal de paramètre (n,p).
7) Pour la première partie de cette question : récurrence directe ou mieux on observe que $]0,1[$ est stable par f
La fonction f étant croissante sur $]0,1[$ (comme composée de telles fonctions), il en résulte que le signe de $z_{n+2}-z_{n+1}=f(z_{n+1})-f(z_n)$ est aussi celui de $z_{n+1}-z_n$ donc de celui de z_2-z_1■
8) La question précédente prouve que (z_n) est bornée et monotone donc convergente vers une limite $l\in[0,1]$, ce par conservation des inégalités LARGES à la limite. Par passage à la limite dans la relation de récurrence satisfaite par cette suite, on récupère (puisque f est continue sur le segment $[0,1]$) bien $f(l)=l$■
9) Simple utilisation de la stricte croissance de la fonction ln sur R_+^*■
10) ψ est dérivable sur $I=]0,1]$ et, pour $x\in I$, $\psi'(x)=-a+1/x>0$ si $x\neq 1$, cette fonction est donc strictement croissante sur I et s'annule en 1 qui est donc son seul point d'annulation. 1 est donc le seul point fixe de f sur I. 8) montre bien que (z_n) converge vers 1■
11) ψ' s'annule en $1/a$ et ψ croît strictement sur $]0,1/a]$ puis décroît strictement. Comme $\psi(x)\to-\infty$ en 0^+ et que $\psi(1/a)>\psi(1)=0$, le TVI montre que ψ s'annule une fois (en α) entre 0 et $1/a<1$ puis s'annule en 1 uniquement sur la partie où elle décroît.
Si $0<z_1<\alpha$: les varaitions de ψ montrent que $]0,\alpha[$ est stable par ψ et ainsi (Q9) prouvent que $f(z_n)\geq z_n$ (pour tout $n\geq 1$) soit que (z_n) croît et est à termes dans $]0,\alpha[$ donc nécessairement $l=\alpha$.
Si $1>z_1\geq\alpha$, la suite décroît et est à termes dans $[\alpha,1[$, elle ne peut converger là aussi que vers α■
12) Z est l'événement il existe un entier $n\geq 1$ à partir duquel les k-ièmes groupes,$k\geq n$, sont vides. Autrement dit , à un moment donné plus personne ne se présente au guichet■
13) Selon votre cours et comme maintes fois rappelé N_n en tant que somme de n variables aléatoires indépendantes et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p suit, elle, une loi binomiale de paramètre (n,p)■
14) Deux situations :
$k>n$, alors cette probabilité conditionnelle vaut 0 puisque $(V_1=k,S=n)=\emptyset$.
$k\leq n$, alors cette probabilité vaut aussi $\mathbb{P}(\mathbb{N}_n=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$.
Puis avec la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(S=n)_{n\geq 0}$, nous avons (et pour tout $k\geq 1$) :
$\mathbb{P}(V_1=k)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(V_1=k|S=n)\mathbb{P}(S=n)=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$.
Soit aussi (après ménage et changement d'indice $j=n-k$:
$\mathbb{P}(V_1=k)e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(q\lambda)^j}{j!}=e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}$, autrement dit $V_1\hookrightarrow\mathcal{P}(p\lambda)$■
15) La fin du préambule de cette partie stipule que l'événement $(V_n=0)$ est inclus dans $(V_{n+1}=0)$, ce pour tout $n\geq 1$. Le théorème de continuité croissante donne le résultat■
16) Pour $j=0$, on est assuré (même réference que précédemment) que $(V_{n+1}=0)$ est réalisé donc que $\mathbb{P}(V_{n+1}=0\mid V_1=j)=1=(\mathbb{P}(V_n=0))^0$□
Pour $j=1$: la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(V_{n+1}=0\mid V_1=1)$ est égale, puisque initialement il y a le client 0 et que celui-ci est automatiquement servi et par translation de -1, à $\mathbb{P}(V_n=0))$□
Envisageons la situation générale et posons, pour $1\leq i\leq j$, R_i le i-ième client veut être servi.
On peut alors voir l'événement conditionné $(V_{n+1}=0\mid V_1=j)$ comme l'intersection des événements (eux-mêmes conditionnés) $(V_{n+1}=0\mid R_i)$ pour $i\in[\![1,j]\!]$; ces derniers sont tous équiprobables et indépendants (cela découle du préambule aussi) et correspondent (compte tenu du protocole établi) au cas $j=1$.
Ainsi $\mathbb{P}(V_{n+1}=0\mid V_1=j)=\prod_{i=1}^{j}\mathbb{P}(V_{n+1}=0\mid R_i)=(\mathbb{P}(V_n=0))^j$■
NB : Je ne suis pas réellement satisfait de cette réponse de circonstance.
17) Par la formule des probabilités totales selon le même système complet d'événements qu'utilisé en Q14, il vient et pour tout entier n:

$\mathbb{P}(V_{n+1}=0)=\sum_{j=0}^{\infty}(\mathbb{P}(V_n=0))^j e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^j}{j!}=e^{p\lambda(z_n-1)}$■

18) Il s'ensuit que $(z_n)_{n\geq 1}$ se trouve régie par la même relation de récurrence que nous avons étudiée en II1.
De fait et selon l'étude menée il n' y a que deux possibilités.
Ou bien $p\lambda \leq 1$ auquel cas la suite (z_n) converge vers 1.
Ou bien $p\lambda < 1$ et cette suite convergerait vers α mais elle devrait le faire en croissant, ce d'après l'énoncé.
Etudions la plausibilité de cette conjonction.
Comme $z_1 = e^{-p\lambda}$ et que $\psi(z_1) = -p\lambda e^{-p\lambda} < 0$, il vient (cf II.1) bien que la suite (z_n) est croissante.
Ainsi pour $p\lambda \leq 1$, Z est un événement presque sûr, ce que le bon sens laisse présager.
Dans la situation opposée, $\overline{Z}$ n'est plus négligeable. Ce qui correspond à un mix de fréquentation assidue et de rapidité de service■

Fin du problème