

Corrigé du TD 31 : Fonctions vectorielles

Exercice 1 : (Accroissements finis généralisés)

Soient f, g dérivables sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, en considérant $t \in [a, b] \rightarrow \det(r(t), r(b))$, où on a posé $r(t) = (f(t) - f(a), g(t) - g(a))$ pour tout $t \in [a, b]$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Solution :

r étant dérivable sur $[a, b]$, $\phi : t \in [a, b] \rightarrow \det(r(t), r(b))$ l'est aussi par composition via une application bilinéaire, elle est de surcroît à valeurs réelles. On remarque en outre que $\phi(a) = \phi(b) = 0$ donc l'égalité des accroissements finis fournit l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$.

Le cours dit aussi que $\phi' = \det(r', r(b))$, ce qui conduit au résultat en explicitant et en spécialisant ■

Exercice 2 : (Inégalité des accroissements finis pour les fonctions vectorielles)

On se donne $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 .

$\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel $\langle, \rangle$, de norme associée $\|\cdot\|$.

1) A l'aide du cours, montrer que $t \mapsto \langle f'(t), f(b) - f(a) \rangle$ est de classe C^1 sur $[a, b]$; préciser g' .

2) Justifier l'existence d'un réel $M \geq 0, \forall t \in [a, b], \|f'(t)\| \leq M$.

3) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à g , établir que : $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$.

Solution :

1) Même argument que pour l'exercice 1 quant à la justification du caractère C^1 de g sur le segment $[a, b]$. De plus (cf cours) $g'(t) = \langle f'(t), f(b) - f(a) \rangle$, ce pour tout $t \in [a, b]$.

2) Résulte de la continuité sur le segment $[a, b]$ de la fonction (à valeurs réelles) $t \mapsto \|f'(t)\|$ (on rappelle que toute norme en dimension finie est continue) à laquelle on applique le théorème de Weierstrass.

3) Il suffit d'appliquer à g l'inégalité des accroissements finis en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ■

Exercice 3 : (Vers l'exponentielle de matrice)

Etablir que la fonction vectorielle $F : t \in \mathbb{R} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tA)^n$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de classe C^1 . Préciser sa dérivée. Peut-on se servir de F pour la résolution de $X' = AX$?

FAIT EN COURS ■

Exercice 4 :

Soit (E_1) l'équation différentielle: $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs complexes de cette équation.

(a) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) vérifiée par la fonction: $g = f + f' + f''$.

(b) Résoudre l'équation (E_2) .

(c) En déduire l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation (E_1) .

2. Soit (S) le système différentiel à coefficients constants $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ et:

$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, où x, y et z sont des fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$.

(a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$? dans $M_3(\mathbb{R})$?

(b) Résoudre le système (S) .

(c) Retrouver alors par cette méthode les solutions de l'équation (E_1) obtenues à la question 1.3. de cette partie.

3. On considère la série entière réelle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. On note alors, lorsque cela existe,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

(b) Justifier que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(c) Déterminer les développements en série entière de φ' , φ'' , $\varphi^{(3)}$ puis $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(d) En utilisant les questions précédentes, déterminer une expression de φ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

(e) Déterminer une expression de $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

(f) Déterminer une expression de $\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n}}{(6n)!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.