Devoir à la maison n° 10

Exercice 1. On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 vérifiant l'équation :

$$(E): \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1. Montrer qu'une telle fonction existe.
   On considère désormais une fonction f vérifiant (E). On note $g : x \mapsto f(x) - f(0)$.
2. (a) Déterminer $g(0)$ et montrer que g vérifie (E).
   (b) En déduire que g vérifie $(E') : \forall x, y \in \mathbb{R},\ g(x+y) = g(x) + g(y)$.
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x - x_0) = g(x) - g(x_0)$.
   (b) En déduire que g est continue en x_0.
4. On note $a = g(1)$ puis $h : x \mapsto g(x) - ax$.
   (a) Montrer que h est 1-périodique et qu'elle admet un minimum m et un maximum M.
   (b) Montrer que h vérifie (E').
   (c) Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $h(c) = M$. En considérant $h(x+c)$, montrer que h est négative.
   (d) Montrer de même que h est positive. Conclure.

Exercice 2. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.
1. Appliquer le théorème des accroissements finis à f entre x et $x + \alpha$.
2. En déduire qu'il existe $(c_1, c_2) \in]x, x+\alpha[^2$ tel que $\dfrac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) = f''(c_2)(c_1 - x)$.
3. On suppose dans la suite que f est bornée par un réel M_0 et que f'' est bornée par un réel M_2.
   Montrer que f' est bornée par $\dfrac{2M_0}{\alpha} + \alpha M_2$.
4. En étudiant la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2M_0}{x} + xM_2$, déterminer $k > 0$ tel que f' est bornée par $k\sqrt{M_0 M_2}$.